Prešovský matboj, 7. 12. 2001, 1. časť

1.1. V Hafových Mňaučiciach žijú iba dva druhy domácich zvierat: psi a mačky. Väčšinou sú to normálne zvieratká, časť z nich sa však pomiatla. 10% psov si o sebe myslí, že sú mačky a 10% mačiek si o sebe myslí, že sú psi. Nedávno sa uskutočnil prieskum, v rámci ktorého boli vyšetrené všetky mačky a všetci psi v Hafových Mňaučiciach. Prieskum ukázal, že 20% všetkých zvierat si o sebe myslí, že sú mačky. Koľko percent domácich zvierat v Hafových Mňaučiciach sú skutočne mačky?

1.2. Povrch drevenej kocky o strane dlhej 9 cm sme nafarbili na fialovo. Potom sme ju rozrezali na 27 malých kociek, ktorých hrana bola dlhá 3 cm. Aká veľká bola plocha nezafarbených stien malých kociek dokopy?

1.3. Stred pravidelného päťuholníka $ABCDE$ označme F a spojme ho s vrcholmi tohto päťuholníka, spojené sú aj dvojice bodov AB, BC, CD, DE a EA. Chceme ofarbiť body A, B, C, D, E a F niekoľkými farbami tak, aby žiadne dva spojené vrcholy nemali rovnakú farbu. Koľko najmenej farieb na to potrebujeme?

1.4. Majme tri pravouhlé trojuholníky s odvesnami dlhými 3 a 4 dm, 4 a 5 dm a 5 a 3 dm. Druhý a tretí trojuholník priložme k odvesnám prvého tak, aby sa všetky pravé uhly dotýkali jedného bodu. Zložme teraz z týchto trojuholníkov štvorsten bez jednej steny. Koľko litrov vody sa do neho zmestí?

1.5. Na 287 stranách magickej knihy tety Bety je množstvo cenných rád študentom matematiky, ktorí nevedia vychádzať so svojimi učiteľmi. Na každej zo strán je aspoň 355, ale najviac 395 slov. Aké najväčšie prirodzené číslo môžeme doplniť namiesto znaku $*$, aby mal študent pravdu, keď povedal:

„*Aspoň $*$ strán tejto knihy musí mať presne rovnaký počet slov.*"?

1.6. *Palindrómom* nazývame také prirodzené číslo (nenulové), ktoré sa nezmení, keď ho čítame sprava alebo zľava (napr. čísla 1001, 434 sú *palindrómy*). Koľko existuje *palindrómov* menších ako milión?

1.7. Do kružnice k so stredom O a polomerom 1 vpíšeme štvorec $ABCD$ (AC a BD sú priemermi kružnice k). Stred kratšieho oblúka AD označíme E. Aký veľký je obsah konvexného štvoruholníka $OCDE$?

1.8. Albín, Bernard a Cyrano chcú dobyť pevnosť Boyard. Jej hradby spolu zo strážnymi vežičkami tvoria pravidelný n-uholník. Ako správni stratégovia sa rozhodli, že si najprv omrknú terén. Chcú si obhliadnuť pevnosť Boyard, tak sa rozdelili tak, že Albín vyrazil opačným smerom popri hradbách ako Bernard a Cyrano. Ako tak Albín kráča po obvode pevnosti, stretne oproti sebe idúceho Bernarda pri nejakej vežičke a hneď o dve vežičky ďalej stretne oproti sebe idúceho Cyrana. Ak je Albín dvakrát rýchlejší ako Bernard a Bernard je dvakrát rýchlejší ako Cyrano, koľko vežičiek má pevnosť Boyard?

1.9. Daný je *hrozný výraz*: $H(m) = |m-10| + |m-20| + |m-40| + |m-80|$. Zistite, koľko existuje celých čísel m takých, že hodnota *hrozného výrazu* je rovná 90.

1.10. Priemer AC kružnice k rozdelíme na 4 zhodné úseky bodmi P, O a R (O je stred kružnice). Bodom P vedieme sečnicu kružnice k, ktorá ju pretína v bodoch B a D tak, že platí $|AP| = \frac{2}{3}|PD|$. Vieme, že obsah $\triangle APD$ je 7. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$?

1.11. Prvá zmienka o korešpondenčnom seminári KMS, ktorý je predchodcom seminára STROM, údajne pochádza z tzv. *magického roka.* O tomto roku viete iba toľko, že ak ho vydelíte číslami 11, 12, 13 dostanete vždy nejaké zvyšky (nezáporné celé čísla menšie ako deliteľ), ktorých súčet je rovný 33. Koľko najmenej rokov by tohto roku mal KMS?

1.12. Koľkými spôsobmi vieme ofarbiť steny kocky šiestimi farbami (každá stena má inú farbu)? Ofarbenia považujeme za rovnaké, ak sa jedno dá previesť na druhé otočením kocky.

Prešovský matboj, 7. 12. 2001, 2. časť

2.1. Na konkurz do filmu *Malý-tučný-škaredý* prišlo 100 záujemcov, pričom 80 z nich bolo malých, 70 tučných a 60 škaredých. Koľko najmenej záujemcov spĺňalo všetky tri podmienky?

2.2. Koľkouholník vznikne rezom kocky $ABCDA'B'C'D'$ ($A'B'C'D'$ je posunutý štvorec $ABCD$) určený stredmi hrán AB, CC' a $A'D'$?

2.3. Superblcha chce vytvoriť nový rekord v skoku do diaľky. Preto sa rozhodla trénovať skákanie na priamke nasledujúcim spôsobom:

a) v prvom kroku skočí 1 cm vpravo

b) v každom ďalšom kroku skočí vždy na opačnú stranu priamky ako v predchádzajúcom skoku, ale dvakrát väčšiu vzdialenosť od bodu, kde sa nachádza.

Aká bude jej vzdialenosť po $2n+1$ skokoch od miesta, odkiaľ začínala skákať?

2.4. Ak do výrazu $(a^b)^c$ dosadzujeme tri rôzne čísla z množiny $\{0,1,2,3\}$, koľko rôznych výsledkov dostaneme?

2.5. Pozorne si prečítajte nasledujúcich päť tvrdení:

A: Tvrdenie **B** je pravdivé.

B: Najviac jedno z tvrdení **A, B, C, D, E** je pravdivé.

C: Všetky tvrdenia **A, B, C, D, E** sú pravdivé.

D:

E:

Tvrdenia **D** a **E** sú napísané zázračným atramentom, ktorí vidia iba tí ľudia, čo nikdy neklamú. Pre ostatných je text neviditeľný. Zistite, ktoré z tvrdení **A, B, C, D, E** sú pravdivé a ktoré nie! (Ak sa Vám stala náhodou taká nepríjemná vec, že tvrdenia **D** a **E** nevidíte, použite svoje logické myslenie. A polepšite sa!)

2.6. Koľko navzájom rôznych racionálnych čísel sa dá zapísať v tvare zlomku $\dfrac{p}{q}$, pričom p a q sú prirodzené čísla menšie ako 11?

2.7. V pravouhlom $\triangle ABC$ ($AB \perp BC$, $|AB| = 4$) označme α veľkosť uhla pri vrchole A, pätu kolmice z bodu B na AC ako D, pätu kolmice z bodu D na AB ako E a nakoniec pätu kolmice z bodu E na AC ako F. Vyjadrite veľkosť $|EF|$ za pomoci uhla α.

2.8. Aký je polomer kružnice vpísanej do kosoštvorca, ktorého uhlopriečky majú veľkosti 6 a 8 cm?

2.9. Na Peťovej kalkulačke sa vôbec nezobrazuje číslica 1, dokonca sa vynecháva (namiesto 15 113 sa napíše 53). Ak umocnil Peťo nejaké prirodzené číslo väčšie ako 3 333, ale menšie ako 4 444 na druhú, dostal výsledok 43 008. Aké číslo chcel umocniť a čo mu malo vyjsť?

2.10. Dve kružnice (k_1, k_2) o polomere 1 sa navzájom dotýkajú v bode P. Nech AP je priemer kružnice k_1 a BC je priemer kružnice k_2 kolmý na AP. Aký je polomer kružnice opísanej $\triangle ABC$?

2.11. Nech k je najmenšie prirodzené číslo také, že číslo $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$ je deliteľné číslom 1 000 000. Aký je ciferný súčet čísla k?

2.12. V $\triangle ABC$ tvoria veľkosti uhlov α, β, γ aritmetickú postupnosť. Vyjadrite veľkosť podielu

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}.$$

Prešovský matboj, 7. 12. 2001, 3. časť

3.1. Ak vydelíme číslo $2001! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2001$ číslom 2002, aký dostaneme zvyšok?

3.2. V každom zo 100 batôžkov je rovnaký počet mincí. Zlodej si vezme z prvého batôžka nejaký počet mincí, z druhého dvojnásobný počet mincí, ako z prvého batôžteka … až z posledného stonásobok toho, čo si zobral z prvého batôžteka. Tak ostala v poslednom 1 minca a vo všetkých dokopy zostalo 14950 mincí. Koľko ukradol zlodej z prvého batôžka?

3.3. Koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať c, ak je riešením sústavy rovníc $(a, b, c, d \in N)$

$$a + b = c^2 d$$
$$a + b + c = 42 \; ?$$

3.4. Janko si pri bicyklovaní všimol, že keď má na prednom ozubenom kolese 40 zubov a na zadnom 15 zubov, tak na jedno otočenie predného ozubeného kolesa prejde 6 metrov. Ak si dá dopredu 60-zubové a dozadu 20-zubové koliesko, koľko metrov prejde na štyri otočenia predného ozubeného kolieska?

3.5. Horolezecká výprava vytesala do ľadovca číselnú os. V tých dňoch našli horolezci na ľadovci stopy bájneho snežného muža Yettiho, ktorý sa vybral na prechádzku po tejto číselnej osi. Jedna zo stôp pochádzala od mláďaťa, ktoré malo nohu č.3 – zakrývala totiž tri po sebe idúce prirodzené čísla. Súčet týchto čísel bol 2001. O kus ďalej našli bádatelia oveľa väčšiu stopu dospelého jedinca. Aj pre túto stopu platilo, že súčet čísel, ktoré zakrývala, bol 2001. Aké najväčšie číslo nohy mohol mať taký dospelý Yetti, ktorý sa prechádzal po číselnej osi?

3.6. Mapa krajiny *Trianguland* má tvar pravouhlého trojuholníka s rozlohou $300\,000\,\mathrm{km}^2$. Napriek tomu, že má krajina až $3\,000\,\mathrm{km}$ štátnych hraníc, do krajiny sa možno dostať iba dvoma hraničnými priechodmi. Jeden je v mieste "pravého uhla", druhý je v mieste, ktoré je rovnako vzdialené od všetkých troch rohov štátu. Koľko kilometrov vzdušnou čiarou sú od seba vzdialené tieto dva hraničné priechody?

3.7. Je daný rovnostranný $\triangle ABC$ so stranou dlhou 10 cm. Bod X tohto trojuholníka nazveme *pekne umiestnený*, ak súčet veľkostí dvoch spomedzi uhlov AXB, BXC a CXA je $270°$. Množina všetkých pekne umiestnených bodov vnútri $\triangle ABC$ je krivkou. Aká je jej dĺžka (zaokrúhlite na 1 des. miesto)?

3.8. Majme nakreslené dva konvexné mnohouholníky. Nazvime ich *veľauholník* a *málouholník*. Hoci má *veľauholník* až dvakrát viac vrcholov ako *málouholník*, priemerná veľkosť vnútorného uhla *veľauholníka* je iba o 5% väčšia ako priemerná veľkosť uhla *málouholníka*. Koľko vrcholov má *veľauholník*?

3.9. Majme taký zaujímavý trojuholník ABC, v ktorom sú ťažnice na strany b a c navzájom kolmé. Aká je potom hodnota pomeru $\dfrac{b^2 + c^2}{a^2}$?

3.10. Adam, Boris, Cyril, Dano a Erik boli na súťaži. Každý z nich sa umiestnil na inom mieste (prvom až piatom). Cyril vie, že Dano skončil o dve miesta lepšie ako Adam a samozrejme vie, ako obstál na súťaži on sám. Správne si aj tipol, že Erik to nevyhrá. Viete, že z týchto údajov vedel zistiť, ako skončila súťaž. Ako sa potom umiestnil Cyril?

3.11. Jožko chcel zistiť, koľko reálnych čísel x spĺňa rovnicu $\lfloor 2 - x^2 \rfloor = |2 - x^2|$. Necháte ho v tom, alebo mu pomôžete? Tak či tak, zistite počet riešení tejto rovnice. ($\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x)

3.12. Ktoré z čísel 1999, 2000, 2001, 2002, 2003 musíme dosadiť namiesto n, aby bolo číslo $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ deliteľné päťkou?