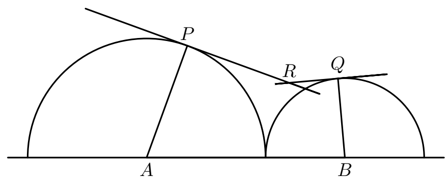
Košický matboj, 30. 4. 2009, 1. časť

1.1. Použitím operácií +, −, ×, : (sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie), zátvoriek a čísel 3, 3, 7 a 7 (každé číslo použite práve raz) vytvorte výraz, ktorého hodnota je 24.

1.2. Usporiadaná dvojica nezáporných celých čísel m a n je *jednoduchá*, ak pri sčítavaní $m + n$ v desiatkovej sústave nemusíme „prechádzať cez desiatku“ (čiže jednotlivé číslice súčtu sa rovnajú súčtu príslušných číslic jednotlivých sčítancov). Koľko existuje jednoduchých dvojíc, ktorých súčet je 4192?

1.3. Koľko dvojciferných kladných celých čísel má párny počet kladných deliteľov?

1.4. Na obrázku sú nakreslené dve dotýkajúce sa polkružnice so stredmi v bodoch A a B, a dotyčnice k nim v bodoch P a Q. Vyjadrite veľkosť uhla PRQ, ak viete, že $|\sphericalangle PAB| = 70°$ a $|\sphericalangle QBA| = 85°$.



1.5. Funkcia $f(x)$ spĺňa pre každé reálne číslo x rovnosť $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$. Vieme, že $f(1) = 1$ a $f(2) = 3$. Zistite hodnotu $f(2009)$.

1.6. Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že číslo $107 \cdot n$ má posledné dve číslice rovnaké ako číslo n.

1.7. Katka a Zuzka hrajú hru piškvorky v mriežke 3×3 políčok. Začína Katka so symbolom $\times$ a nasleduje Zuzka so symbolom $\circ$. Potom striedavo umiestňujú svoje symboly na voľné políčka, až kým sa jednej z nich nepodarí získať 3 svoje symboly na jednej línii (riadku, stĺpci alebo diagonále), čím vyhrala. Koľko je rôznych finálnych pozícií, ak vieme, že Katka vyhrala svojím štvrtým ťahom?

1.8. Predstavte si pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ a v jeho vnútri bod X. O tomto bode viete, že $S_{\triangle AXB} = 8\,\mathrm{cm}^2$, $S_{\triangle DXE} = 8\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{\triangle FXA} = 4\,\mathrm{cm}^2$. Zistite súčet obsahov trojuholníkov BXC, CXD a EXF (v cm^2).

1.9. Nájdite najväčší dvojciferný prvočíselný deliteľ čísla $\binom{200}{100}$.

1.10. Papierový obdĺžnik $ABCD$ zohneme pozdĺž úsečky EF, pričom bod E leží na strane AD, bod F na strane BC a bod C po prehnutí bude v strede strany AB. Vypočítajte dĺžku úsečky EF (v mm), ak dĺžka strany AB je 240 mm a dĺžka strany BC je 288 mm.

1.11. Pre množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ a každú jej neprázdnu podmnožinu vieme vytvoriť jej *alternujúci súčet* takto: zoradíme čísla od najväčšieho po najmenšie a začínajúc najväčším striedavo odčítavame a pričítavame jednotlivé čísla. Napríklad pre $\{1, 2, 3, 6, 9\}$ je výsledok $9 - 6 + 3 - 2 + 1 = 6$ a pre $\{5\}$ je to 5. Nájdite súčet alternujúcich súčtov všetkých množín pre $n = 7$.

1.12. Päť kráv spasie 2 akre trávy za 10 dní. Sedem kráv spasie 3 akre trávy za 30 dní. Tráva rastie konštantnou rýchlosťou a taktiež všetky kravy jedia rovnakou konštantnou rýchlosťou. Veľkosť trávy predtým, než sa začnú kravy pásť, je vždy rovnaká. Koľko dní bude trvať, kým šestnásť kráv spasie 7 akrov trávy?

Košický matboj, 30. 4. 2009, 2. časť

2.1. Nájdite koeficient pri člene x^{17} v rozvoji $E = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-z)$.

2.2. Tomáš má štvormiestne číslo a Vlado má päťmiestne číslo. Naviac vieme, že obe tieto čísla obsahujú všetky číslice od 1 do 9 a ich súčin je najväčší možný. Aké číslo má Vlado?

2.3. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme preusporiadať reťazec ABBCABBC tak, aby neobsahoval podreťazec ABBC? (Preusporiadania nazývame rôzne, ak vzniknú rôzne reťazce.)

2.4. Desať ľudí tancuje okolo niekoľkých stoličiek v kruhu. Môžeme ich usadiť 7! spôsobmi (na každej stoličke sedí práve jedna osoba), pričom prípady, kedy postupnosť sediacich ľudí je rovnaká, avšak je posunutá v kružnici, sú rozdielne. Koľko je stoličiek?

2.5. Desať účastníkov sedí v jednom rade na desiatich stoličkách (každý na jednej). Potom si presadnú tak, že každý z nich si sadne na vedľajšiu stoličku, alebo ostane sedieť na svojom mieste. Koľkými spôsobmi si môžu takto presadnúť?

2.6. Koľko je usporiadaných pätíc kladných celých čísel (a, b, c, d, e), ktoré vyhovujú nerovnostiam

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \leq a + b + c + d + e \leq 10?$$

2.7. Katka vyrába hrkálky v tvare prstenca, na ktorom sú navlečené 3 červené a 7 modrých guľôčok. Koľko rôznych hrkálok môže Katka vytvoriť?

2.8. Vypočítajte hodnotu x, ak

$$\frac{x \cdot y}{x + y} = 1, \quad \frac{y \cdot z}{y + z} = 2, \quad \frac{z \cdot x}{z + x} = 3.$$

2.9. Predpokladajme, že ťažnice AA' a BB' v trojuholníku ABC zvierajú medzi sebou pravý uhol. Nech $|BC| = 3\,\text{cm}$ a $|AC| = 4\,\text{cm}$. Určte dĺžku strany AB.

2.10. Na parkovisko, ktoré má 16 parkovacích miest v rade vedľa seba, príde 12 áut a náhodne zaparkujú každé na jedno miesto. Potom príde Fero so svojou dodávkou, ktorá potrebuje 2 parkovacie miesta vedľa seba. Aká je pravdepodobnosť, že bude môcť zaparkovať?

2.11. Kružnici so stredom S je opísaný rovnoramenný lichobežník $ABCD$. Vzdialenosť jedného vrcholu od stredu S je $7\,\text{cm}$ a vzdialenosť druhého je $4\,\text{cm}$. Určte obsah lichobežníka (v cm^2).

2.12. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existujú tri kladné celé čísla x, y a z, ktoré sú deliteľmi čísla $n-1$, pričom platí $x > y > z$ a $x + y + z = n$.

Košický matboj, 30. 4. 2009, 3. časť

3.1. Máme päť tekvíc s celočíselnou hmotnosťou v kg. Ak postupne zvážime všetky dvojice tekvíc, tak dostaneme 10 rôznych hmotností. Aký je najmenší možný rozdiel hmotností najľahšej a najťažšej tekvice?

3.2. Nájdite všetky také trojice prvočísel (x, y, z), ktoré vyhovujú vzťahu $x^3 - y^3 = z$.

3.3. Aritmetický priemer istých troch po sebe idúcich násobkov čísla 3 je a. Aritmetický priemer istých štyroch po sebe idúcich násobkov čísla 4 je $a + 27$. Aritmetický priemer najväčšieho a najmenšieho zo spomínaných siedmych čísel je 42. Určte hodnotu a.

3.4. Nájdite najväčšie deväťciferné číslo s ciferným súčtom 45 a ciferným súčinom $9! = 362880$.

3.5. Koľko existuje usporiadaných trojíc kladných celých čísel (a, b, c), ktoré vyhovujú rovniciam $a \cdot b \cdot c + 9 = a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ a zároveň $a + b + c = 10$?

3.6. Aká je pravdepodobnosť, že tri náhodne vybraté vrcholy kocky budú tvoriť ostrouhlý trojuholník?

3.7. O reálnych číslach x, y vieme, že spĺňajú rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1$ a $x^3 + y^3 = 4$. Nájdite aspoň jednu takú dvojicu x, y.

3.8. Na papieri vyznačíme 100 bodov tak, že tvoria vrcholy konvexného 100-uholníka. Potom vo vnútri tohto konvexného 100-uholníka vyznačíme ďalších 30 bodov tak, že žiadne tri spomedzi všetkých 130 vyznačených bodov neležia na jednej priamke. Potom pôvodný 100-uholník vystrihneme. Aký je maximálny možný počet mnohouolníkov, na ktoré sa dá tento 100-uholník rozstrihať, ak každý vrchol každého mnohouholníka musí byť niektorý zo 130 vyznačených bodov?

3.9. Nech pre kladné celé čísla a, b, c, d platí $a^5 = b^4$, $c^3 = d^2$ a $c - a = 19$. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať výraz $d - b$.

3.10. V rovine rovnoramenného trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C leží bod D tak, že trojuholník ABD je ostrouhlý a rovnoramenný so základňou AD a priamky AB a CD sú rovnobežné. Vypočítajte veľkosť uhla CBD (v stupňoch).

3.11. Zistite, koľko z prvých 1000 kladných celých čísel je možné vyjadriť v tvare

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$$

kde x je nejaké reálne číslo, pričom $\lfloor z \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla z, čiže najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako z.

3.12. Daný je lichobežník $ABCD$, $AB \parallel CD$, pričom $|AB| = 11\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 19\,\mathrm{cm}$, $|DA| = 7\,\mathrm{cm}$. Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A a D sa pretínajú v bode P; osi vnútorných uhlov pri vrcholoch B a C sa pretínajú v bode Q. Vypočítajte obsah šesťuholníka $ABQCDP$ (v cm^2).

Riešenia

1.1 $(\frac{3}{7}+3)\cdot 7$
1.2 300
1.3 84
1.4 155
1.5 -3
1.6 50
1.7 444
1.8 28
1.9 61
1.10 260
1.11 448
1.12 70

2.1 0
2.2 87531
2.3 361
2.4 4
2.5 89
2.6 116
2.7 8
2.8 $12/5 = 2{,}4$
2.9 $\sqrt{5}$
2.10 17/28
2.11 56
2.12 13, 31

3.1 7
3.2 (3,2,19)
3.3 27
3.4 997544421
3.5 21
3.6 1/7
3.7 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$
3.8 158
3.9 757
3.10 15
3.11 600
3.12 $30\sqrt{3}$