Zadanie: Pre trojuholník ABC zostrojte rovnoramenný trojuholník EDC so základňou DE na priamke AB, pre ktorý navyše platí, že $|CD|$ je rovné polovici obvodu trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku EDC sa dotýka (vnútorne) kružnice pripísanej k strane AB trojuholníka ABC.

Riešenie: Majme spomínané 2 kružnice. Ak ukážeme, že vzdialenosť ich stredov je rovná rozdielu ich polomerov, dostaneme až na nejaké špeciálne prípady práve to, čo máme dokázať. Cieľ je teda jasný a hor sa do dôkazu.

Zostrojme kolmicu na priamku AB prechádzajúcu stredom opísanej kružnice trojuholníku EDC (označme ho S_o) a označme V_0 priesečník tejto kolmice na AB. Ďalej nájdime bod X ako priesečník kolmice na AB, ktorá zase pre zmenu prechádza stredom kružnice pripísanej k strane AB trojuholníka ABC (stred označme ako S_p). Aby sme nevybehli z cviku, zostrojme ešte jednu priamku, tentoraz rovnobežnú s AB a prechádzajúcu bodom S_p, jej priesečník s priamkou V_0S_o označme ako Z. Dostali sme teda štvoruholník V_0XS_pZ. Pre naše riešenie budeme ešte nutne potrebovať dotykový bod L kružnice pripísanej trojuholníku ABC k priamke CB.

Pre ďalšie výpočty použime nasledujúce označenie: r_o je polomer opísanej kružnice trojuholníku DEC, r_p je polomer pripísanej kružnice k strane AB trojuholníka ABC, s je polovičný obvod trojuholníka ABC, v je výška trojuholníka ABC.

Ďalej už nasleduje len trojaké použitie Pytagorovej vety, a to konkrétne pre trojuholníky S_pCL, potom S_pCZ a nakoniec S_pS_oZ, pričom sa snažíme nájsť $|S_pS_o|$.

V trojuholníku S_pCL dostávame, že $|S_pC|^2 = r_p^2+s^2$. Tento poznatok aplikujme v trojuholníku S_pCZ, odkiaľ $|S_pZ|^2 = s^2 - v^2 - 2r_pv$. Uvažujme ďalej trojuholník S_pS_oZ, kde využijeme, že $|S_oZ| = |CZ| - |CS_o|$. Potom $|S_oS_p|^2 = (r_o - r_p)^2 - 2vr_o + s^2$.

Zo vzťahu $2r_o. \sin\alpha = |CE| = |CD|$, kde uvažujeme rovnoramenný trojuholník DEC a v ňom konkrétne uhol pri vrchole E označený ako α, vyjadríme r_o: $r_o = \frac{s}{2\sin\alpha} = \frac{s^2}{2v}$, keďže z trojuholníka CV_oE vieme, že $\sin\alpha = \frac{|V_oC|}{|CE|} = \frac{v}{s}$. Dosaďme r_o do predošlého výpočtu a konečne dostávame, že $|S_oS_p| = (r_o - r_p)$.

Sporom ešte v krátkosti ukážeme, že sa jedná skutočne o vnútorný dotyk, teda že dotykových bodov týchto 2 kružníc nie je viac ako 1, ale práve 1. Nájsť 1 dotykový bod P_1 je triviálne. Uvažujme teda, že kružnica opísaná sa s pripísanou pretnú v 2 bodoch. Druhý dotykový bod označme ako P_2. Vznikol nám teda nový trojuholník $S_oS_pP_2$, kde však neplatí trojuholníková nerovnosť. V opačnom prípade by $S_o \equiv S_p$, čo je však spor, keďže v zadaní máme kružnicu pripísanú k strane AB trojuholníka ABC.

Tým sme teda ukázali, čo sme aj chceli ukázať, a to že spomínané kružnice majú vnútorný dotyk.