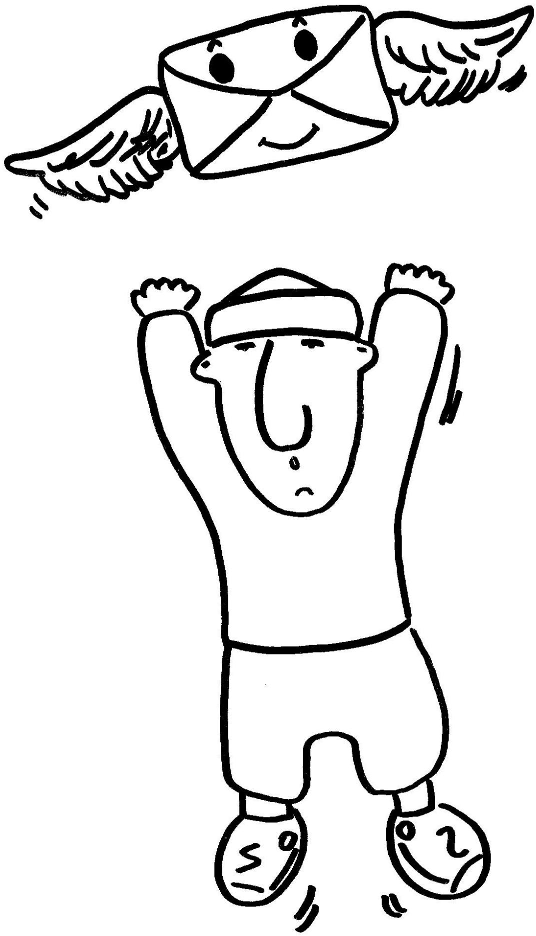
MALYNÁR

Číslo 2 • november 2008 Zimná časť 18. ročníka



Ahoj!

(Naokolo panuje slávnostná atmosféra, ľudia sú v napätom očakávaní, dav skanduje)
DAV: *UJO MALYNÁR! UJO MALYNÁR!*
UJO MALYNÁR: *(vystupuje na pódium, v jednej ruke kružidlo, v druhej kalkulačka, vrhá na okolostojacich šibalský pohľad skúseného matematika) Milé Malynárčatá, s potešením vám oznamujem, že zimná séria sa nám prehupla do svojej druhej polovice. Dostávajú sa k vám opravené riešenia prvej séria a zároveň nastáva čas vyriešiť tú druhú. Nedokáže to nikto iný, iba vy! Je to len a len na vás. Počúvajte, čo hovorí hlas vášho srdca a hlas pani učiteľky na hodinách matematiky!*
DAV: *(šalie) MALYNÁR! MALYNÁR! DOKÁŽEME TO! MALYNÁR!*
UJO MALYNÁR: *Nech vás sprevádza sila. (odchádza z pódia)*

Vedúci Malynára

Vzorové riešenia úloh 1. série Zimnej časti

Úloha č. 1:
opravovali Katka Réveszová & Mima Hoang
Zadanie: Na kope je 50 štvorkilogramových a 50 sedemkilogramových balíkov. Na loďku môžeš naložiť najviac 79 kilogramov.
a) Koľko najviac balíčkov môžeš naukladať do loďky, ak ich nesmieš deliť? Ktoré balíky treba naložiť, aby sa na druhú stranu dostal čo najväčší náklad?
b) Koľko najviac kilogramov môžeš preplaviť, ak sa do lodičky zmestí najviac 12 balíkov?
Riešenie: a) Aby sme mali čo najviac balíčkov, musíme ukladať tie, ktoré majú čo najmenšiu hmotnosť. Keďže máme na výber len z dvoch možností, štvorkilogramový alebo sedemkilogramový, tak vyberieme tú s menšou hmotnosťou štvorkilogramový balíček. Ak by sme ukladali čo najviac štvorkilogramových balíčkov do loďky s nosnosťou 79 kg, naložilo by sa $79 : 4 = 19$ balíčkov a 3 kilogramy by sme nevyužili. Ak odoberieme jeden štvorkilogramový balíček, nevyužijeme $3 + 4 = 7$ kg. K dispozícii však máme aj sedemkilogramové balíčky, takže jeden sedemkilogramový balíček využijeme na úplné zaplnenie nosnosti loďky. Na loďke tak bude 18 štorkilogramových balíčkov a 1 sedemkilogramový balíček $[(18 \cdot 4\,\mathrm{kg}) + (1 \cdot 7\,\mathrm{kg}) = 79\,\mathrm{kg}]$. Táto možnosť je zároveň odpoveďou na druhú otázku: „Ktoré balíčky treba naložiť, aby sa na druhú stranu dostal čo najväčší náklad?“ Ak sa nám podarilo naložiť na loď presne 79 kg, tak sme úlohu splnili, pretože väčší náklad loďka neunesie.
b) Veľa z vás napísalo, že môžme preplaviť 84 kg. Zabudli ste na podmienku úlohy, že loďka má nosnosť 79 kg. Ak by ste na ňu naložili 84 kg, tak by sa

potopila. No nápad dávať na loďku čo najviac sedemkilových balíčkov je super, lebo naším cieľom je naložiť čo najväčší náklad pomocou 12 balíčkov. Keď skúsime 11 sedemkilogramových balíčkov, budeme mať na loďke $11 \cdot 7\,\mathrm{kg} = 77\,\mathrm{kg}$ nákladu. Ak však naložíme na loďku iba 10 sedemkilogramových balíčkov, budeme mať $10 \cdot 7\,\mathrm{kg} = 70\,\mathrm{kg}$. Aby sme využili možnosť naložiť najviac 12 balíčkov, naložíme na loďku aj 2 štvorkilogramové balíčky, aby sme mali čo najväčší náklad. Musíme však dávať pozor, aby bola hmotnosť nákladu nanajvýš 79 kg. To by sme mali $(10 \cdot 7\,\mathrm{kg}) + (2 \cdot 4\,\mathrm{kg}) = 78\,\mathrm{kg}$. Nakoniec overíme, či na loďke máme menej ako 12 balíčkov. $10 + 2 = 12$:)

4-kilogramové balíky	7-kilogramové balíky	celkový náklad
0 ks	12 ks	84 kg
1 ks	11 ks	81 kg
2 ks	10 ks	78 kg
3 ks	9 ks	75 kg
4 ks	8 ks	72 kg
5 ks	7 ks	69 kg

Komentár: Veľa riešiteľov nevysvetlilo, prečo v úlohe a) nakladali viac štvorkilogramových balíčkov a tým pádom nevysvetlili, prečo v úlohe b) nakladali viac sedemkilogramových balíčkov. Ďalšie časté chyby boli, že riešitelia zabudli odpovedať na druhú otázku v časti a).

Úloha č. 2:

opravovali Peter Milošovič & Ladislav Bačo

Zadanie: Jedným krokom dokážeš vyjsť o 1 alebo 2 schody vyššie.
a)Koľko rôznych možností, ktorými sa dá vyjsť po päťschodovom schodisku, môžeš použiť?
b)Koľko máš možností, ak by bolo na schodisku 6 schodov?
c)Koľko možností existuje pre schodisko, ktoré má 7 schodov?
Riešenie: Ukážeme si riešenie pre najťažšiu časť **c)**. Pre ostatné časti sa úloha vyrieši veľmi podobne.

Najprv zistíme, akými spôsobmi viem 7 schodov rozpísať na súčet jednotiek a dvojek. Začneme hľadať možnosti tak, aby boli kroky cez 2 schody použité čo najviackrát a budeme ich počet postupne znižovať.

$$7 = 2 + 2 + 2 + 1$$
$$7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$$
$$7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Iný spôsob už nie je, lebo pri väčšom počte dvojek by už bolo potrebných aspoň 8 schodov. Teraz pre každý spôsob určíme počet rôznych možností, v akom poradí môžeme jednotlivé kroky spraviť.

$2+2+2+1$: budeme presúvať jednotku, ktorá môže byť na 4 rôznych miestach. Získame tak možnosti 2221, 2212, 2122 a 1222 (zapisujeme ich skrátene bez $+$).

$2+2+1+1+1$: budeme presúvať druhú dvojku, až kým nedôjdeme na koniec. Potom posunieme prvú dvojku o jedno miesto vpravo a druhú dáme hneď vedľa nej a budeme opakovať tento postup. Inak povedané, určíme takto „najľavejšiu“ dvojku, pred ktorou sú už len jednotky a nájdeme pre ňu všetky rôzne umiestnenia druhej dvojky vpravo od prvej dvojky. Dostaneme možnosti 22111, 21211, 21121, 21112, 12211, 12121, 12112, 11221, 11212, 11122.

$2+1+1+1+1+1$: budeme presúvať dvojku postupne doprava na všetky možné miesta. Získame týchto 6 možností: 211111, 121111, 112111, 111211, 111121 a 111112.

$1+1+1+1+1+1+1$: táto možnosť bude vždy rovnaká, nech už zapíšeme tie jednotky v hocijakom poradí.
Teda spolu máme $4+10+6+1=21$ možností.

Iné riešenie: Využijeme takéto pozorovanie: na 7. schod sa vieme dostať zo 6. schodu krokom cez jeden schod alebo z 5. schodu krokom cez 2 schody a už nijako inak. Každý spôsob výstupu na 6. schod môžeme predĺžiť o jeden krok cez jeden schod, dostaneme spôsob výstupu na 7. schod. Pri každom takomto spôsobe budeme stáť na 6. schode. Podobne každý spôsob výstupu na 5. schod vieme predĺžiť o jeden krok cez dva schody, dostaneme tiež nejaký spôsob výstupu na 7. schod. Pri každom takomto spôsobe určite na 6. schode nezastaneme. Preto počet spôsobov, ako vystúpiť na 7. schod, je rovný súčtu počtov spôsobov pre 5. schod a pre 6. schod. Táto úvaha funguje aj pre iné počty schodov, napríklad počet spôsobov výstupu na tretí schod dostanem ako súčet počtov spôsobov pre prvý a druhý schod. Teraz využijeme tento postup.
Na 1. schod sa vieme dostať 1 spôsobom.
Na 2. schod sa vieme dostať 2 spôsobmi. ($1+1$ a 2).
Na 3. schod sa vieme dostať 3 spôsobmi. Z 1. schoda 1 možnosť alebo z 2. schoda 2 možnosti.
Na 4. schod sa vieme dostať 5 spôsobmi. Z 2. schoda 2 možnosti alebo z 3. schoda 3 možnosti.
Na 5. schod sa vieme dostať 8 spôsobmi. Z 3. schoda 3 možnosti alebo zo 4. schoda 5 možností.
Na 6. schod sa vieme dostať 13 spôsobmi. Zo 4. schoda 5 možností alebo z 5. schoda 8 možností.
Na 7. schod sa vieme dostať 21 spôsobmi. Z 5. schoda 8 možností alebo zo 6. schoda 13 možností.
Komentár: Mnohí ste len vypísali možnosti, a často sa stávalo, že vám niektoré chýbali, prípadne ste niektoré napísali viackrát. Tiež ste málokedy opísali postup, ktorým ste hľadali riešenia. Za to sme strhávali pár bodov, podľa toho, či bolo z poradia možností jasné, ako ste ich hľadali, alebo nie.

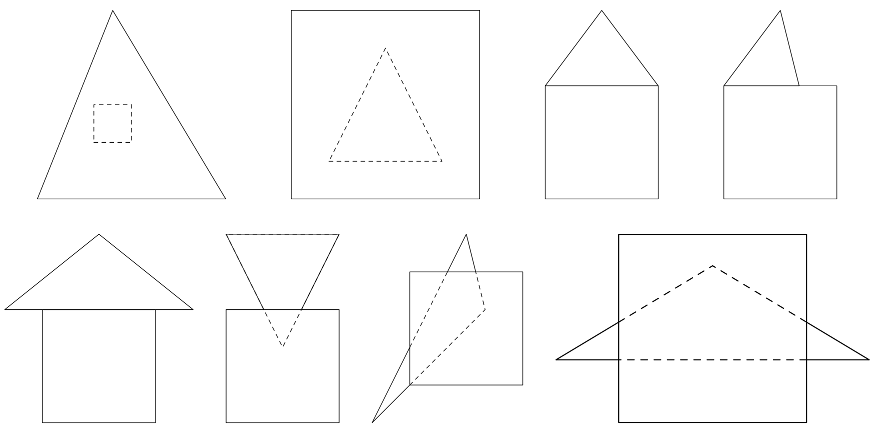
Úloha č. 3:

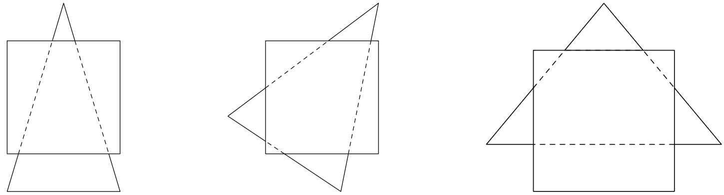
opravovala Zuzka Cocuľová

Zadanie: Máš jeden štvorec a jeden trojuholník, oba útvary môžu byť ľubovoľne veľké a trojuholník môže byť ľubovoľného tvaru. Môžeš ich ukladať cez seba alebo vedľa seba (musia sa dotýkať viac ako jedným bodom). Koľko vrcholov môžu mať útvary, ktoré takto vzniknú? Nezabudni, že je viac možností, ako môže trojuholník vyzerať, nezabudni na žiadny.

Riešenie: Pri tejto úlohe obzvlášť platilo, že čím viac ráz si prečítate zadanie, tým lepšie. Úlohou nebolo nakresliť všetky možné útvary, ktoré mohli z trojuholníka a štvorca vzniknúť. Mali ste zistiť, koľko vrcholov môže vzniknutý útvar mať. Keď chceme ukázať, že útvar môže mať 5 vrcholov, stačí nájsť jeden útvar s 5 vrcholmi, nemusíme ich nájsť všetky.

Druhá podstatná vec: ak sa nám nepodarilo nájsť útvar s viac ako 13 vrcholmi, myslíme si, že také útvary vôbec nie sú. Toto však treba nejako zdôvodniť. Ako by sme si inak mohli byť istí? Nedá sa povedať, že sme „hľadali dostatočne dlho“, a pritom neúspešne. Čo ak niekto iný vydrží dlhšie a predsa by taký útvar našiel? Poďme kresliť. Jeden vrchol – to je bod, 2 vrcholy – to je len úsečka, 3 vrcholy – aha, máme trojuholník. Vzniknutý útvar môže mať 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ba aj 13 vrcholov. Môžete si takéto útvary pozrieť na obrázku. Prečo nie viac? Na začiatku máme 7 vrcholov (3 vrcholy trojuholníka a 4 vrcholy štvorca). Vrcholy môžeme skryť, alebo vytvoriť nové. Vrchol trojuholníka nebude vrcholom vzniknutého útvaru, ak bude ležať vo vnútri alebo na hranici štvorca (okrem jeho vrcholov). Tak isto môžeme vrcholy štvorca skryť do vnútra alebo na hranicu trojuholníka. Nový vrchol vznikne, ak strana trojuholníka pretne stranu štvorca. Jedna strana trojuholníka môže preťať najviac dve strany štvorca – najviac 6 nových vrcholov vytvorených tromi stranami trojuholníka. Spolu so siedmimi pôvodnými vrcholmi dostaneme najviac 13 vrcholov.





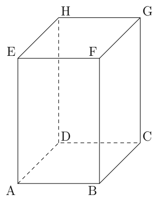
Komentár: Kresliť, kresliť, kresliť. Nestačí napísať, že ste niečo našli, ak to nenakreslíte, nemôžeme vám to uznať. Viacerí z vás si neboli istí, čo je vrchol výsledného útvaru a čo nie. To, že bod bol vrcholom trojuholníka, neznamená, že musí byť vrcholom každého útvaru, ktorý z tohto trojuholníka vznikol. Ak ste si neboli istí, čo to vlastne ten vrchol je, netreba sa báť opýtať sa rodičov, pani učiteľky, alebo pokojne aj nás. Nemôžete predsa odpovedať na otázku, ktorej nerozumiete. A nakoniec pre tú polovicu riešiteľov, ktorej sa to týka, jazykové okienko: útvar má jeden vrchol, dva/tri/štyri vrcholy (nie vrcholi, ani vrchole), päť/šesť/tisícosemstodvadsaťšesť vrcholov. Do skloňovania, priatelia!

Úloha č. 4:

opravovali Lucka Fabišíková & Kristínka Faguľová

Zadanie: Kváder na obrázku má štvorcovú podstavu a jeho výška je dvakrát väčšia ako dĺžka hrany podstavy. To znamená, že dva jeho rozmery sú rovnako veľké, tretí je dvakrát väčší. Ktorá trasa je kratšia, ak vždy prejdeš vzdialenosť medzi dvoma rohmi kvádra najkratšou možnou cestou, **A → B → E → G → F → A → E → H** alebo **A → D → G → H → D → B → E → H**?

Riešenie:



Podstavou nášho kvádra je štvorec. Z toho vieme, že hrany AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE sú rovnako dlhé. Ďalej bočné hrany (výšky) AE, BF, CG, DH sú rovnaké. Naše trasy tiež obsahujú uhlopriečky dvoch druhov: jednak rovnako dlhé uhlopriečky AC, BD, EG, FH v štvorcových stenách, jednak rovnako dlhé uhlopriečky AF, BE, BG, CF, CH, DG, AH, DE v obdĺžnikových stenách. Stačí nám teda jednotlivé trasy rozdeliť na úseky a zistiť, ktoré sú rovnaké.

Zistíme, že $AB = AD$, $BE = DG$, $EG = DB$, $GF = GH$, $FA = BE$, $AE = HD$, $EH = EH$. Vidíme, že každému úseku z prvej trasy vieme nájsť rovnako dlhú dvojičku v druhej trase a žiadna úsečka sa nám nezvýši. Môžeme preto povedať, že trasy sú rovnako dlhé.

Iné riešenie: Označíme si jednotlivé dĺžky hrán tak, ako to bolo v zadaní. Stranu štvorca písmenkom a, výšku kvádra $2 \cdot a$ (lebo je to dvojnásobok dĺžky podstavy), uhlopriečku štvorca u, uhlopriečku obdĺžnika v. Pre prvú trasu zapíšeme dĺžky úsekov pomocou zvolených písmeniek. Dostaneme $AB = a$, $BE = v$, $EG = u$, $GF = a$, $FA = v$, $AE = 2 \cdot a$, $EH = a$. Pre druhú trasu spravíme to isté: $AD = a$, $DG = v$, $GH = a$, $HD = 2 \cdot a$, $DB = u$, $BE = v$, $EH = a$. Pre obe trasy tieto všetko sčítame. Prvá trasa má dĺžku $a+v+u+a+v+2\cdot a+a=5\cdot a+u+2\cdot v$. Druhá trasa $a+v+a+2\cdot a+u+v+a=5\cdot a+u+2\cdot v$. Vidíme, že oba súčty sú rovnaké, to znamená, že aj trasy budú rovnako dlhé.

Záver: Trasy sú rovnako dlhé, ani jedna z nich nie je kratšia. Inak povedané, obe trasy sú najkratšie.
Komentár: Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo, že ste si neuvedomili, že ak chceme prejsť vzdialenosť medzi dvoma bodmi, ležiacimi oproti sebe, čo možno najkratšou cestou, musíme ísť po uhlopriečke. Väčšinou ste všetko obchádzali po hranách. Taktiež nemali mnohí nakreslený obrázok so zadanými trasami, čo by vám určite veľmi pomohlo pri riešení. :)

Úloha č. 5:

opravovali Milka Fabišíková & Katka Potpinková
Zadanie: Existujú 3 druhy zmrzliny. Piškótová, škoricová a mandarínková.
Prvý mravec povedal: „Zmrzlina je škoricová alebo piškótová.“
Druhý mravec tvrdil: „Nie, určite nie je mandarínková.“
Tretí vyhlásil: „Ale áno, zmrzlina je škoricová.“
Trpaslík ti pošepol, že aspoň jeden mravec hádal správne a aspoň jeden nesprávne. Celá zmrzlina má rovnakú príchuť. Akú?
Riešenie: Dalo by sa rozoberať, ktorí z mravcov hovoria pravdu a ktorí nie, ale možností je veľa. Rýchlejšie sa k riešeniu dostaneme, ak budeme uvažovať celú situáciu osobitne pre jednotlivé druhy zmrzliny.

Keby bola zmrzlina *mandarínková*, potom by musel 1. mravec klamať, 2. mravec by tiež klamal a 3. mravec by tiež nehovoril pravdu. V tomto prípade by všetci klamali, čo je v rozpore so zadaním úlohy, ktoré hovorí, že aspoň jeden mravec hovoril pravdu. Preto táto možnosť nevyhovuje, a teda zmrzlina nemôže byť mandarínková.

Keby sme si povedali, že zmrzlina je *škoricová*, potom by prvý, druhý aj tretí mravec hovorili pravdu. To by tiež nesúhlasilo so zadaním, lebo aspoň jeden z nich musí klamať. Ani táto možnosť nevyhovuje, preto zmrzlina nebude ani škoricová.

Ostáva nám jediná možnosť. Zmrzlina bude *piškótová.* V tomto prípade budú prvý a druhý mravec hovoriť pravdu a tretí mravec bude klamať. Podmienka zadania platí, pretože dva mravce hovoria pravdu a jeden klame. Zmrzlina je piškótová.

Záver: Zmrzlina má piškótovú príchuť.
Komentár: Tu sa ukázalo, že na väčšinu úloh sa dá pozerať v rôznych pohľadov. Ak niečo nejde, tak to treba skúsiť inak. ;)

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Gymnázium Poštová 9, Košice
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Pergamon, s.r.o., Strojárenská 3, Košice

Názov: MALYNÁR — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • november • Zimná časť 18. ročníka (2008/2009)
Internet: `http://malynar.strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`