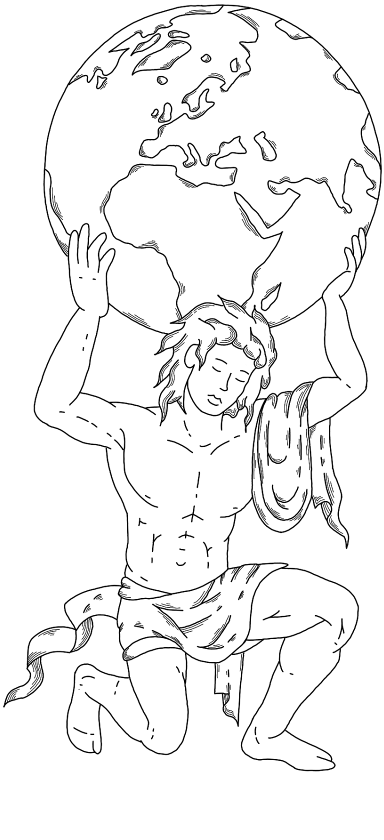
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 6 — Ročník 37 matik.strom.sk



Ahoj!

Je tu ďalší časopis MATIKa, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najšikovnejších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia, kde budú obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa Ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s Tebou uvidíme!

vedúci MATIKa

Ako bude

Minisústredenia na školách

Niektoré zážitkové a vzdelávacie aktivity, ktoré robíme, by sme radi priblížili aj skupine žiakov, ktorí neriešia naše semináre v podobe krátkeho matematického sústredenia priamo v škole. V spolupráci so školami organizujeme jednodňové a dvojdňové matematické „minisústredenia“ pre 30 až 60 žiakov 5. – 9. ročníka (vždy rozsah najviac 4 ročníkov). Sústredenia prebiehajú priamo v priestoroch školy. Viac sa dozviete na `https://matik.strom.sk/sk/aktivity/minisustredenia/`.

Tábor mladých matematikov

Drahý riešiteľ, ak premýšľaš, čo s časom počas letných prázdnin, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka. Pozvánku s odkazom na prihlasovanie nájdeš na stránke.

Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je dlhšie, takže o toľko lepšie! Viac informácií a aj samotnú pozvánku a prihlasovanie nájdeš na `https://matik.strom.sk/tmm/`.

Vzorové riešenia 2. série úloh letného semestra

1

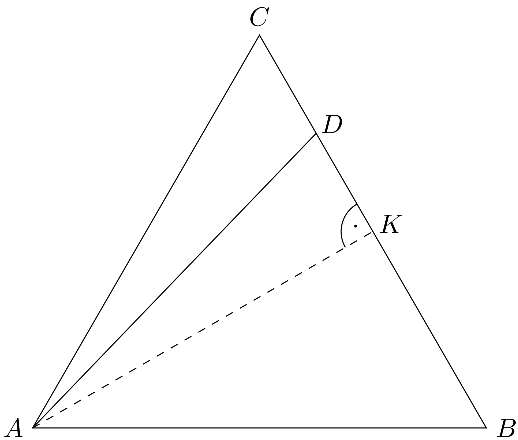
opravovali: **Nina Betáková** a **Lujza Milotová**
najkrajšie riešenia: Nina Hudáková a Sofia Sotáková

44 riešení

Zadanie

Héfaistos ukul meč s hrotom v tvare rovnostranného trojuholníka ABC. Niekam na jeho stranu BC vypálil bod D. Obsah trojuholníka ABD je trikrát väčší ako obsah trojuholníka ACD. Rozdiel ich obvodov je 5 cm. Určte veľkosť strany AB.

Riešenie



Zo zadania vieme, že trojuholník ABD má trikrát väčší obsah ako trojuholník ACD. Trojuholníky ABD a ACD majú spoločnú výšku. Na obrázku je to úsečka AK, ktorá je kolmá na úsečky CD a BD a zároveň prechádza vrcholom A, ktorý je spoločný pre oba trojuholníky. Obsah trojuholníka vypočítame ako $\frac{v_a \cdot a}{2}$. Výšku v_a majú oba tieto trojuholníky rovnakú, teda trojnásobný obsah vzniká práve pri rozdiele v dĺžke strany. Strana BD je preto trikrát dlhšia ako strana CD, teda platí $|BD| = 3 \cdot |CD|$. Taktiež zo zadania vieme, že obvod jedného trojuholníka je o 5 cm väčší ako obvod druhého trojuholníka. Vidíme, že trojuholníky majú dve dvojice rovnako dlhých strán - stranu AD majú spoločnú a strany AB a AC sú rovnako dlhé, lebo sú stranami rovnostranného trojuholníka ABC. Rozdiel v obvode preto vzniká iba pri stranách CD a BD. Keďže vieme, že BD je dlhšia, platí $|BD| = |CD| + 5$. Za $|BD|$ môžeme dosadiť hodnotu $3 \cdot |CD|$, a tak dostaneme rovnicu:

$$3 \cdot |CD| = |CD| + 5$$

Z čoho odčítaním jedného $|CD|$ z oboch strán a následného vydelenia dvomi dostávame:

$$2 \cdot |CD| = 5$$
$$|CD| = 2,5$$

Celá strana BC rovnostranného trojuholníka ABC sa skladá dokopy zo $4 \cdot |CD|$, a preto $|AB| = 4 \cdot |CD| = 4 \cdot 2,5 = 10$. Veľkosť strany AB je teda 10 cm.

2

opravovali: **Martin „Iskra“ Dudjak** a **Oskar Cacara**
najkrajšie riešenie: Tomáš Cabúk

37 riešení

Zadanie

Iris priradila siedmim farbám dúhy cifry 1 až 9, každú najviac raz. Prvej farbe, červenej, priradila cifru 1. Všimla si, že súčiny cifier prvých troch farieb, prostredných troch farieb a posledných troch farieb sa rovnajú. Zároveň si všimla, že sedemciferné číslo, ktoré očíslovanie dúhy vytvorilo, je deliteľné jednou z cifier, ktoré nepoužila. Aké cifry priradila Iris jednotlivým farbám dúhy?

Riešenie

Označme si hodnoty farieb dúhy zaradom ako A, B, C, D, E, F a G. Zo zadania vieme, že $A \cdot B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G$. Vieme taktiež, že $A = 1$, preto po dosadení platí $B \cdot C = C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G$. To si zapíšeme ako tieto dve rovnice:

$$B \cdot C = C \cdot D \cdot E$$
$$C \cdot D \cdot E = E \cdot F \cdot G$$

Z prvej rovnice úpravou (vydelením C) dostávame $B = D \cdot E$. B musí byť teda cifra, ktorá sa dá získať súčinom dvoch rôznych jednociferných čísel, z ktorých ani jedno nie je 1 (tá už bola použitá na A). To môže byť jedine 8 $(2 \cdot 4)$ alebo 6 $(2 \cdot 3)$. Naše zistenia si zapíšeme do tabuľky.

A	B	C	D	E	F	G
1	6		2	3		
1	6		3	2		
1	8		2	4		
1	8		4	2		

Z tretej rovnice úpravou (vydelením E) dostaneme $C \cdot D = F \cdot G$. Hľadáme teda číslo, ktoré vieme vyjadriť ako súčin dvoch rôznych dvojíc rôznych jednociferných čísel iných ako 1. Takými číslami sú iba 12 $(4 \cdot 3$ a $2 \cdot 6)$, 18 $(3 \cdot 6$ a $2 \cdot 9)$ a 24 $(3 \cdot 8$ a $4 \cdot 6)$.

- Nech súčin $C \cdot D = F \cdot G = 12$. V prvej možnosti v našej tabuľke by C muselo byť 6, ale takú hodnotu má už B. V druhej možnosti by C muselo byť 4, čo nie je problém, ale F a G by museli byť v nejakom poradí 2 a 6, čo ale nemôže byť, lebo 2 a 6 už sú B a E. V tretej a štvrtej možnosti to bude podobné, že dosadené hodnoty už sú použité.

- Nech súčin $C \cdot D = F \cdot G = 24$. Prvá a tretia možnosť nevyhovujú, pretože C by muselo byť dvojciferné. V druhej možnosti by C muselo byť 8 a F a G v nejakom poradí 4 a 6, ale 6 je už B. V štvrtej možnosti by C bolo 6 a F a G v nejakom poradí 3 a 8, ale 8 je už B.

- Nech súčin $C \cdot D = F \cdot G = 18$. Prvá možnosť nevyhovuje, pretože C by muselo byť 9 a F a G v nejakom poradí 3 a 6, avšak 3 už je E a 6 už je B. Druhá možnosť tiež nevyhovuje, pretože C by muselo byť 6, čo už je B. Štvrtá možnosť nevyhovuje, pretože na mieste D je 4 a 4 nevieme vynásobiť žiadnym prirodzeným jednociferným číslom tak, aby vznikla 18. Tretia možnosť vyhovuje, a teda na mieste C by bola 9 a na mieste F a G v nejakom poradí 3 a 6.

Ďalšia podmienka zo zadania je, že sedemciferné číslo, ktoré po očíslovaní vzniklo je deliteľné jednou z cifier, ktoré pri očíslovaní použité neboli. Vznikli nám dve možné čísla – 1 892 463 a 1 829 436. Číslo 1 892 463 nie je deliteľné 5 ani 7. Číslo 1 829 436 nie je deliteľné 5, ale je deliteľné 7, teda vyhovuje zadaniu.
Po prejdení všetkých možností sme zistili, že Iris priradila farbám dúhy postupne v poradí, v ktorom idú od červenej cifry 1, 8, 2, 9, 4, 3, 6.

Komentár

Veľmi nás teší, že aj napriek malému množstvu odovzdaných riešení, riešilo mnoho z vás túto úlohu správne. Zároveň ste viacerí našli aj alternatívne spôsoby riešenia, ktoré vyžadovali viac znalostí, čo nás tiež veľmi potešilo. Na čo si však treba v takýchto úlohách dávať pozor je, že ak sa snažíte vypísať všetky možnosti, tak musíte dokázať, že možnosti, ktoré ste vypísali sú naozaj všetky.

3 opravovali: **Riki Prikler** a **Jano Richnavský**

najkrajšie riešenia: Alena Chladná a Jakub Jančiga

31 riešení

Zadanie

Zvýraznená časť zadania sa zmenila 28.1.2024

Afrodita napísala na pergamen niekoľko po sebe idúcich kladných celých čísel. Ares roztrhol pergamen na dve časti tak, že:

- na každej z nich je napísaných niekoľko **(aspoň jedno)** po sebe idúcich kladných celých čísel,
- na jednej časti je o jedno číslo viac ako na druhej,
- súčty čísel na oboch častiach sa rovnajú.

Dokážte, že najmenšie z čísel, ktoré Afrodita napísala, je druhou mocninou kladného celého čísla (tzn. vieme ho napísať ako súčin kladného celého čísla so samým sebou).

Riešenie

Roztrhnutím pergamenu sme dostali dve postupnosti po sebe idúcich kladných čísel, a keďže spolu tvorili pôvodne jednu, platí, že na časti A budú všetky čísla menšie ako najmenšie číslo na časti B. Ak by bol počet čísel na oboch častiach rovnaký, platilo by, že súčet čísel na časti A je menší ako na B, preto musí byť o číslo viac práve na časti A - toto číslo dorovná rozdiel, ktorý vznikne pri súčtoch zvyšných čísel na oboch častiach.

Odmyslime si teda najmenšie číslo na časti A. Bez neho majú obe časti rovnaký počet čísel. Všimnime si, že vieme ku každému číslu (okrem odmysleného) priradiť jedno číslo z druhej časti (vždy to, ktoré je na rovnakej pozícii, čiže k prvému na časti A prvé na časti B, k druhému druhé atď. až k najväčšiemu na časti A najväčšie na časti B).

Aby sme sa dostali vo dvojici od menšieho čísla z časti A k väčšiemu číslu v časti B, musíme k nemu pripočítať práve hodnotu, ktorá je rovná počtu čísel v každej z častí.

Všimnime si, že počet dvojíc je tiež rovný počtu čísel v každej časti, preto je celkový rozdiel súčtov častí rovný počtu čísel v časti prenásobený rozdielom v každej dvojici, čo je vlastne to isté číslo.

Keďže odmyslené číslo dorovnáva tento rozdiel, musí byť rovné tomuto číslu, a teda je druhou mocninou (násobkom seba samého). Keďže sme si ho odmysleli ako najmenšie číslo, dokázali sme, čo sme chceli.

Iné riešenie

Podobne ako v prvom riešení prídeme na to, že o číslo viac bude na časti A, kde sú čísla menšie. Najmenšie číslo na časti A si opäť odmyslíme.
Každému číslu z časti A priradíme číslo z časti B na opačnej pozícii (k najväčšiemu číslu na časti A priradíme prvé číslo na časti B, k predposlednému na A druhé na B atď. až k prvému na A najväčšie na časti B).
Pozrime sa teraz na rozdiely medzi číslami v rámci dvojice. Dvojica čísel, ktorá sa nachádza na hranici častí (najväčšie číslo na časti A a prvé číslo na časti B) sú od seba vzdialené len o 1, keďže pôvodne stáli za sebou v postupnosti kladných celých čísel. Rozdiel ich susedov sa zvýši o 2 (menšie číslo sme zmenšili o 1, väčšie sme zväčšili o 1), preto je celkový rozdiel ich susedov 3. Rozdiel ďalšej dvojice (3. číslo od konca na A a tretie číslo na B) bude 5, ďalšej 7 atď.
Porovnajme teraz súčet čísel v časti A a súčet čísel v časti B. Ak by bolo v každej časti len po jednom čísle, ich celkový rozdiel je 1 (bola by tam len jedna dvojica, prvá spomenutá v predchádzajúcom odseku). Ak by boli v každej časti po 2 čísla, celkový rozdiel je $1+3=4$ (prvé dve dvojice spomenuté v predchádzajúcom odseku). Ak by tie čísla boli 3, rozdiel by bol $1+3+5=9$ atď.
Všimnime si, že so zvýšením počtu čísel na častiach sa zvýši ich rozdiel vždy o číslo, ktoré je o dva väčšie ako posledné v doterajšom súčte. Všimnime si, že podobne sa správajú aj druhé mocniny kladných celých čísel: $1=1=1^2$, $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$, $1+3+5+7+9=25=5^2$ atď. Z uvedeného vyplýva, že rozdiel v súčtoch čísel na časti A a časti B bude vždy druhou mocninou (dokázať sa to dá cez porovnanie n^2 a $(n+1)^2=n^2+2n+1$, kde vidíme, že mocnina čísla o 1 väčšieho je o $2n+1$ väčšia).
Keďže sa tento rozdiel kompenzuje v najmenšom odmyslenom čísle, toto číslo musí byť rovné tejto druhej mocnine, čím sme opäť dokázali to, čo sme potrebovali.

Iné riešenie

Označme najmenšie číslo x. Potom na prvej časti sú čísla x, $(x+1)$, …, $(x+k-1)$, $(x+k)$ (spolu $k+1$ čísel) a na druhej časti čísla $(x+k+1)$, $(x+k+2)$, …, $(x+2k-1)$, $(x+2k)$ (spolu k čísel). O jedno číslo viac musí byť na prvej časti, čo sme zdôvodnili už v prvom riešení. Teraz si porovnajme súčty čísel na oboch častiach, ktoré sa zo zadania majú rovnať:

$$x+(x+1)+\cdots+(x+k)=(x+k+1)+(x+k+2)+\cdots+(x+2k)$$

Na pravej strane upravíme zátvorkami jednotlivé členy tak, aby sa podobali na tie na ľavej strane.

$$x+(x+1)+\cdots+(x+k)=((x+1)+k)+((x+2)+k)+\cdots+((x+k)+k)$$

Následne preusporiadame poradie na pravej strane.

$$x+(x+1)+\cdots+(x+k)=k+k+\cdots+k+(x+1)+\cdots+(x+k)$$

Všetko, čo je na ľavej aj pravej strane, z oboch strán odčítame. Na ľavej strane nám ostane len x a na pravej niekoľko k.

$$x = k + k + \cdots + k$$

Keďže bolo na druhej časti k čísel a z každého nám ostalo práve jedno číslo k, je ich presne k.

$$x = k \cdot k$$

Vidíme, že najmenšie napísané číslo x je rovné druhej mocnine čísla k, a keďže k vyjadruje počet čísel na papieri, ide o kladné celé číslo, a teda dokázali sme, čo sme chceli.

Komentár

Ako vidíte vo vzorových riešeniach, k úlohe sa dalo pristúpiť rôznymi postupmi rôznej úrovne. Stretli sme sa s každým typom riešenia niekoľkokrát, čo nás veľmi teší. Tým, ktorých riešenia sa podobali na to posledné alebo boli dokonca ešte komplikovanejšie, odporúčame, aby to s komplexnosťou svojich riešení zbytočne nepreháňali, niekedy je menej viac a hlavne prehľadnejšie.
Relatívne veľká časť riešiteľov sa zasekla na tom, že riešenie nedokázala všeobecne – opakujeme to vždy a aj naďalej budeme, že vypísanie niekoľkých možností, ktoré nájdete, nedokazuje, že to bude platiť vždy. Takéto riešenia sme preto nemohli ohodnotiť vysokým počtom bodov.
Koniec koncov najviac zastúpený počet bodov bol ten maximálny, takže okrem toho, že boli vaše riešenia rôzne, boli aj správne.

4

opravovali: **Martin Kopčány a Martin Mentel**
najkrajšie riešenia: Dominik Feňovčík a Ján Meteňko

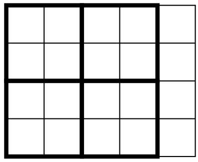
30 riešení

Zadanie

Héra dookola vypĺňala tabuľku 5×4 tak, že v každej 2×2 podtabuľke sa nachádzalo každé z jej štyroch obľúbených čísel. Poseidon si po každom vyplnení zapísal súčet všetkých čísel vo vyplnenej tabuľke. Koľko najviac rôznych súčtov mohol mať Poseidon zapísaných?

Riešenie

Keďže v každej podtabuľke 2×2 sa nachádzajú 4 rovnaké čísla, tak každá takáto podtabuľka má nejaký konštantný súčet. Do tabuľky vieme umiestniť 4 takéto podtabuľky (vyznačené hrubou čiarou na obrázku), pričom tieto štyri podtabuľky majú rovnaký súčet pre hocijaké rozmiestnenie čísel. To znamená, že súčet čísel v celej tabuľke ovplyvňuje len posledný stĺpec.



Zamyslime sa nad tým, ako môžeme rozmiestniť čísla do posledného stĺpca. Vedľa seba nemôžu byť 2 rovnaké čísla, potom by totiž podtabuľka obsahujúca tieto dve čísla nespĺňala podmienky zadania.
Začnime posledný stĺpec tabuľky vypĺňať bez ujmy na všeobecnosti. Nech v políčku v prvom riadku je číslo a. V druhom políčku nemôže byť rovnaké číslo, čiže nech tam je iné číslo b. V treťom políčku môže byť buď opäť a, alebo c. Ak by tam bolo číslo a, tak vo štvrtom políčku môže byť b alebo iné číslo c.
Ak by v treťom políčku bolo c, tak vo štvrtom políčku môžu byť čísla a, b alebo štvrté číslo d. Možnosti na rozmiestnenie čísel v poslednom stĺpci sú teda: (a, b, a, b), (a, b, a, c), (a, b, c, a), (a, b, c, b) alebo (a, b, c, d). Zátvorkami takto označujeme štvoricu.
Z prvej možnosti vieme dostať vyhovujúcu tabuľku striedaním stĺpcov (a, b, a, b) a (c, d, c, d). Z druhej možnosti zase striedaním stĺpcov (a, b, a, c) a (d, c, d, b), zo štvrtej striedaním stĺpcov (a, b, c, b) a (c, d, a, d) a z piatej striedaním stĺpcov (a, b, c, d) a (c, d, a, b).

a	c	a	c	a
b	d	b	d	b
a	c	a	c	a
b	d	b	d	b

a	d	a	d	a
b	c	b	c	b
a	d	a	d	a
c	b	c	b	c

a	c	a	c	a
b	d	b	d	b
c	a	c	a	c
b	d	b	d	b

a	c	a	c	a
b	d	b	d	b
c	a	c	a	c
d	b	d	b	d

Jediná možnosť, ktorú nevieme docieliť, je stĺpec (a, b, c, a), pretože dvojici (b, c) chýba a do podtabuľky 2×2, ale nemôže byť ani na jednej z pozícií X a Y, keďže potom by v podtabuľke s týmto políčkom bolo dvakrát a.

				a
			X	b
			Y	c
				a

Možné súčty posledného stĺpca sú teda $2a + 2b$, $2a + b + c$, $a + 2b + c$, $a + b + c + d$. Druhý a tretí súčet je to isté pre iné priradenie Hériných obľúbených čísel neznámym a, b, c, d, čiže tretím súčtom sa nemusíme zapodievať. Postupne v týchto súčtoch máme počty možností:

- Ak tento súčet je $2a + 2b$, tak na zvolenie dvojice a a b spomedzi Hériných štyroch obľúbených čísel máme $4 \cdot 3 = 12$ možností. Nezáleží ale na tom, ktoré z nich je a a ktoré b, keďže obidva násobíme dvojkou. Preto musíme tento počet vydeliť dvomi, čím dostávame 6 možností.
- Ak tento súčet je $2a+b+c$, tak máme 4 možnosti na zvolenie a. Následne máme $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$ možnosti na zvolenie čísel b a c zo zvyšných troch čísel, keďže nám opäť nezáleží na konkrétnom priradení, len na dvojici, dokopy teda dostávame $4 \cdot 3 = 12$ možností.
- Ak tento súčet je $a + b + c + d$, nezáleží na tom, ktorej neznámej priradíme ktoré číslo, ich súčet bude vždy rovnaký. Dostávame teda 1 možnosť na súčet.

Dokopy preto existuje najviac $6 + 12 + 1 = 19$ rôznych súčtov, ktoré mohol mať Poseidon zapísané. Ešte potrebujeme ukázať, že týchto 19 súčtov sa naozaj dá dosiahnuť. To platí napríklad pre čísla $1, 10, 100, 1000$. Súčet štyroch štvorcov bude $1111 \cdot 4 = 4444$ a následne súčet posledného stĺpca môže byť:

$2a + 2b$	$2a + b + c$	$a + b + c + d$
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 10 = 22$	$2 \cdot 1 + 10 + 100 = 112$	$1 + 10 + 100 + 1000 = 1111$
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 100 = 202$	$2 \cdot 1 + 10 + 1000 = 1012$	
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1000 = 2002$	$2 \cdot 1 + 100 + 1000 = 1102$	
$2 \cdot 10 + 2 \cdot 100 = 220$	$2 \cdot 10 + 1 + 100 = 121$	
$2 \cdot 10 + 2 \cdot 1000 = 2020$	$2 \cdot 10 + 1 + 1000 = 1021$	
$2 \cdot 100 + 2 \cdot 1000 = 2200$	$2 \cdot 10 + 100 + 1000 = 1120$	
	$2 \cdot 100 + 1 + 10 = 211$	
	$2 \cdot 100 + 1 + 1000 = 1201$	
	$2 \cdot 100 + 10 + 1000 = 1210$	
	$2 \cdot 1000 + 1 + 10 = 2011$	
	$2 \cdot 1000 + 1 + 100 = 2101$	
	$2 \cdot 1000 + 10 + 100 = 2110$	

A naozaj sme dostali 19 rôznych súčtov, čiže tento počet sa dá dosiahnuť.

Komentár

Táto úloha bola dosť technická, a preto sa dali urobiť chyby na veľa rôznych miestach. Niektorí ste napríklad uvažovali, že Hérine obľúbené čísla sú 1, 2, 3 a 4, čím vám odpadli niektoré možnosti, lebo platí, že $2 + 2 = 1 + 3$, čo by sa u voľby zo vzoráku nestalo, a preto vo vzoráku vyšlo viac možností ako pri tejto voľbe.

Druhé miesto, kde sa ľahko dala urobiť chyba je, že keď už vieme, že záleží len na súčte v poslednom stĺpci, tak úplne zabudneme na predchádzajúce stĺpce. Napríklad, keď uvažujeme, že v poslednom stĺpci budú čísla (a, b, c, a), tak by sa zo zanedbaním zvyšku tabuľky mohlo zdať, že je to rozumná možnosť. Ako však vidíme zo vzoráku, tak táto možnosť sa nedá dosiahnuť. Pri takýchto úlohách je dobré pre tie možnosti, ktoré vyhovujú ukázať, ako sa dajú zkonštruovať a pri tých, ktoré nejdú jasne ukázať, prečo nejdú. Vyhnete sa takto chybám a strhnutým bodom.

5

opravovali: **Veronika Vodičková** a **Lujza Milotová**

najkrajšie riešenia: Daniela Tkáčová a Dominik Feňovčík

30 riešení

Zadanie

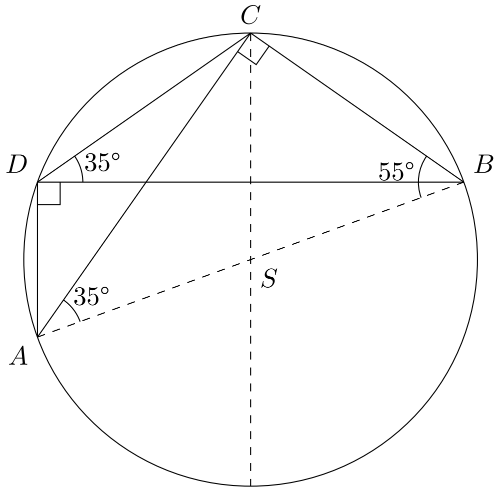
Nebeská záhrada má tvar štvoruholníka $ABCD$, v ktorom platí, že uhol ACB má $90°$, uhol BAC má $35°$ a body B a D sú symetrické (osovo súmerné) podľa priamky prechádzajúcej stredom strany AB a bodom C. Aký veľký je uhol ADC?

Riešenie

Tálesova veta je známe tvrdenie, že vrchol trojuholníka leží na kružnici nad protiľahlou stranou práve vtedy, keď vnútorný uhol pri ňom je pravý. Podľa tejto vety bod C leží na kružnici nad priemerom AB. Túto kružnicu nazveme k a stred úsečky AB nazveme S. S je aj stredom k. Kružnica je osovo súmerná podľa každej priamky cez svoj stred, teda bod D ako obraz bodu B v súmernosti podľa CS musí tiež ležať na k.

V trojuholníku ABC zvyšný vnútorný uhol je $|\sphericalangle ABC| = 180° - 35° - 90° = 55°$. To znamená, že $|\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle BAC|$. Je známe, že v trojuholníku oproti väčšiemu uhlu je väčšia strana. Takže $|AC| > |BC| = |DC|$. Keďže bod B nie je totožný s bodom C, neleží na CS a nie je totožný ani s bodom D. Z týchto dvoch faktov plynie, že body A, B, C a D ležia na k v tomto poradí.

Protiľahlé vnútorné uhly tetivového štvoruholníka sa sčítajú na $180°$, a preto $|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ABC| = 180° - 55° = 125°$. (V tomto poslednom kroku sme použili usporiadanie bodov na kružnici. Pri inom usporiadaní by uhly ADC a ABC mohli byť obvodové nie nad protiľahlými oblúkmi, ale nad totožnými.)



6 opravovali: **Tomáš Lang** a **Martin Masrna**

najkrajšie riešenie: Magdaléna Škriabová

24 riešení

Zadanie

V trónnej sále na Olympe bolo 10 bohov. Každý z nich mal od 1 do 100 rokov (vek rátame na celé roky). Dokážte, že spomedzi týchto bohov môžeme vybrať dve neprázdne rovnako staré skupiny (nikto nebude v oboch). Vek skupiny je súčtom vekov jej členov.

Riešenie

Najprv zodpovedzme dve otázky:

1. Koľko rôznych vekov môže skupina bohov nadobudnúť? Najmenší možný vek skupiny je 1, keď je v nej iba jeden 1-ročný boh. Najväčší možný vek skupiny je $9 \cdot 100 = 900$, keď je v nej deväť najstarších možných vekov (10 bohov v jednej skupine nemôže byť, lebo by druhá skupina musela byť prázdna). Existuje teda nanajvýš 900 rôznych vekov, ktoré môže skupina bohov nadobudnúť.

2. Koľkými rôznymi spôsobmi vieme vybrať skupinu bohov? Pre každého z 10 bohov sa rozhodneme, či do skupiny patrí, alebo nie. Pre každého ďalšieho existuje variant, že buď je v danej skupine, alebo nie je, preto možnosti násobíme dvomi. Takto vieme vybrať spolu $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$ skupín, no dve možnosti (prázdnu skupinu a všetkých 10 bohov) musíme vylúčiť. Vybrať vieme teda $2^{10} - 2 = 1022$ rôznych skupín bohov.

Vidíme, že vieme vybrať viac skupín ako je možných vekov skupiny. To znamená, že vieme vybrať nejaké dve, ktoré budú mať rovnaký vek. Totižto, ak by mali mať všetky skupiny rôzny vek, mohlo by ich byť nanajvýš toľko, koľko je možných vekov, ale je ich viac.
Vyberme teda dve rôzne skupiny s rovnakým vekom. Ak nezdieľajú žiadneho boha, splnili sme podmienky zadania. Ak zdieľajú nejakých bohov, môžeme ich odstrániť z oboch skupín, čím z oboch vekov skupín odčítame rovnaký počet rokov, teda zachováme rovnosť vekov skupín a splníme podmienky zadania. Treba ešte dodať, že pri takomto odstraňovaní bohov sa nestane, že by sa z nejakej skupiny stala prázdna. Ak by sa to stalo jednej skupine, zjavne nemali pred odstránením rovnaký súčet a ak by sa to stalo obom, tak neboli pred odstránením rôzne.

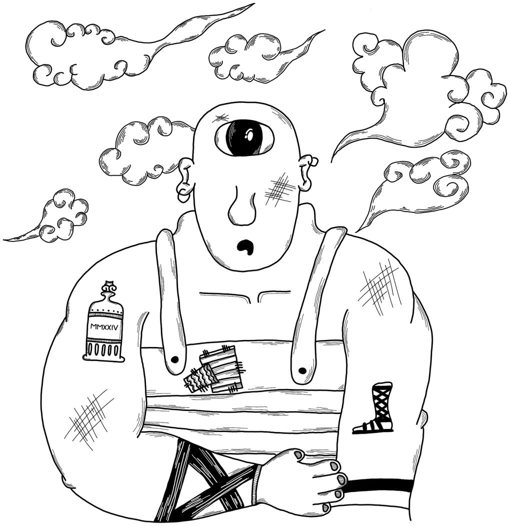
Komentár

Viacerí z vás úlohu riešili nasledovne: povedzme, že prvý boh má 1 rok, druhý 2 roky, potom tretí nemôže mať 3, takže bude mať 4, potom štvrtý bude mať 8 atď. Problém je, že toto nie je dostatočný všeobecný dôkaz – je to iba skúšanie jednej konkrétnej možnosti. Prečo by sme mali začať s tým, že nejaký boh má 1 rok? Čo ak žiaden taký neexistuje? Prečo by to vôbec malo byť „výhodné“? Veď potom nemôžeme použiť žiadne dve za sebou idúce čísla. Nie je potom lepšie začať pri čo najväčších číslach – nech majú bohovia postupne 100, 99, 98, 96 atď. rokov. Čo v takom prípade?
Do budúcna teda pozor na to, aby vaše riešenie skutočne riešilo úlohu všeobecne. Poradíme, že ak v úlohe máte dokázať, že nejaké dve skupiny sú rovnaké, veľmi často sa bude riešiť práve Dirichletovým princípom (je viac možných skupín ako súčtov, teda nejaké dve budú mať ronaký súčet). Nabudúce už budete určite vedieť, ako na to a my dostaneme samé 9-bodové riešenia.

Konečné poradie letného semestra 37. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 3.	Richard Semanišin	Z7	GAlejKE	54	9	9	9	4	9	9	**108**
	Richard Futáš	Z7	ZPAngKE	54	9	9	9	7	9	9	**108**
	Alena Chladná	Z8	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	**108**
4. - 5.	Alica Földesová	Z7	VSCharlott	54	9	9	8	-	9	9	**107**
	Dominik Feňovčík	Z8	ZBeleKE	53	9	9	9	9	9	9	**107**
6.	Magdaléna Škriabová	Z9	ZKro4KE	52	9	9	9	9	9	9	**106**
7.	Hana Erdélyiová	Z8	GAMČABA	54	9	9	9	6	-	9	**105**
8.	Filip Feher	Z7	ZPAngKE	52	9	9	9	-	9	6	**103**
9.	Tomáš Cabúk	Z8	ZHlaGL	51	9	9	9	5	9	1	**101**
10.	Šimon Jonaštík	Z7	GAMČABA	51	9	8	7	4	9	-	**97**
11. - 12.	Jakub Jančiga	Z7	ZGoraZA	47	9	9	9	2	9	-	**94**
	Ján Meteňko	Z9	ZŠ Lúčna	43	9	9	9	9	9	6	**94**
13.	Kristofer Noel Rjabinčák	Z7	ZKro4KE	42	9	9	-	7	9	6	**91**
14. - 15.	Adam Horváth	Z7	GAlejKE	53	9	7	8	2	-	-	**87**
	Lívia Lukáčová	Z9	ZPoliKE	49	9	9	9	2	9	-	**87**
16.	Michal Revický	Z8	GJARMPO	37	9	9	9	4	9	-	**86**
17.	Hana Ihnátová	Z8	ZObcSeč	50	9	9	3	0	6	4	**85**
18. - 20.	Tomáš Urmanič	Z7	GAMČABA	47	7	9	9	2	-	-	**83**
	Sandra Futášová	Z7	ZPAngKE	47	9	-	-	-	9	9	**83**
	Marie Kasalová	Z9	GTruhla	33	9	7	9	7	9	9	**83**
21. - 24.	Marek Babuščák	Z7	GAlejKE	50	9	8	3	3	-	-	**81**
	Sophia Sotáková	Z9	ZŠverHE	47	9	9	3	4	9	-	**81**
	Jakub Katrák	Z8	ZPoliKE	48	9	9	2	2	9	-	**81**
	Sara Vojtkova	Z9	ZPoliKE	49	9	9	3	2	9	-	**81**
25.	Lukáš Paška	Z9	ZKe30KE	44	8	9	3	7	1	6	**78**
26. - 27.	Ondrej Medo	Z7	OSWün	48	9	9	-	-	1	-	**76**
	Daniela Tkáčová	Z8	ZLevoSN	46	9	9	1	-	9	1	**76**
28. - 31.	Lukáš Húdek	Z9	GAlejKE	46	9	9	3	5	1	1	**74**
	Nina Hudáková	Z9	GAlejKE	47	9	9	-	-	9	-	**74**
	Vojto Bálint	Z8	CZRZaZA	49	9	7	-	-	9	-	**74**
	Elena Kundríková	Z7	ZKro4KE	40	9	9	-	7	-	-	**74**
32.	Daniel Ryan Takáč	Z9	GAlejKE	48	9	9	-	7	-	-	**73**
33.	Patrik Murín	Z7	ZKro4KE	36	9	9	3	0	4	-	**70**
34.	Jakub Tomasz	Z7	ZKro4KE	41	4	9	-	2	6	-	**68**
35. - 36.	Kristina Jančigová	Z9	BGMHSuč	37	9	7	3	0	9	1	**66**
	Marek Mičko	Z7	ZKro4KE	39	9	7	3	1	-	-	**66**
37.	Lukáš Kostík	Z9	GAlejKE	45	9	7	3	1	-	0	**65**
38.	Emilián Frischer	Z7	GAlejKE	46	7	-	3	-	-	0	**59**
39.	Lýdia Mikušáková	Z7	GAlejKE	43	6	-	-	-	-	-	**49**
40.	Michal Hudák	Z7	GAlejKE	40	-	-	-	-	-	-	**40**
41.	Eva Hricová	Z9	GAlejKE	39	-	-	-	-	-	-	**39**
42.	Barbora Brindžáková	Z9	GPMláKE	18	9	3	8	-	-	-	**38**
43.	Simona Stahovcová	Z7	ZPAngKE	26	9	-	-	-	-	-	**35**
44.	Šimon Mihalik	Z9	GsvTAKE	34	-	-	-	-	-	-	**34**
45.	Viliam Vrchovinsky	Z7	ZKro4KE	26	-	-	-	-	-	-	**26**
46.	Kareem Tereska	Z8	ZKomeMI	23	-	-	-	-	-	-	**23**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
47.	Daniela Štulajterová	Z8	ZKro4KE	13	5	-	-	-	-	-	**18**
48.	Jakub Porubsky	Z7	ZPAngKE	14	1	-	-	-	1	-	**17**
49.	Samuel Švec	Z8	ZKro4KE	13	-	-	-	-	-	-	**13**
50.	Oliver Kruták	Z7	GAlejKE	12	-	-	-	-	-	-	**12**
51.	Olívia Kovaľová	Z8	ZJuhVnT	10	-	-	-	-	-	-	**10**
52.	Miriam Varechová	Z9	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
53.	Veronika Štiavnická	Z7	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	**8**
54. - 56.	Veronika Vavreková	Z8	ZKro4KE	7	-	-	-	-	-	-	**7**
	Damián Fedor	Z8	ZJuhVnT	7	-	-	-	-	-	-	**7**
	Patrik Sklenár	Z7	GTVanSL	0	7	-	-	0	-	-	**7**
57.	Lukáš Kmec	Z8	ZKro4KE	5	-	-	-	-	-	-	**5**
58. - 60.	Leo Torma	Z8	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Matúš Katina	Z8	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Adela Polomská	Z8	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
61.	Slavomira Synott	Z8	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	-	**1**
62.	Max Hložek	Z8	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	**0**



Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Apríl 2024 • Letný semester 37. ročníka

Web: `matik.strom.sk`

E-mail: `matik@strom.sk`

Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.