



Milí riešitelia,

začal sa druhý polrok školského roka! Ľudia panikária, pobejú kade-tade a dokonca protestujú v uliciach. Je to tak, táto udalosť v mnohých z nás vzbudzuje zmiešané pocity. Ale milí priatelia, nehádzte flintu do žita. Je tu nové číslo semináru **STROM** a s ním nový svetlý bod tam kdesi v dialave, o ktorý sa môžete oprieť vždy, keď vám bude ťažko – sústredenie. Preto nakúpte nové ceruzky, pravítka s Nemom a Shrekom a pustite sa do zadaní, ktoré sa už teraz pred vami trasú. Veľa zdraru a ukrutne dobrých myšlienok vám želá

váš **STROM**

Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (Súťaž Talentovaných Riešiteľov Obľubujúcich Matematiku), organizovaný Združením **STROM**, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.

Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka doplňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. **STROM** je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo e-mailom, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zväzťe, či nenapíšete svoje riešenie na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

V prípade zasielania riešení e-mailom ich posielajte na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk vo formáte PDF. Všetky úlohy môžete poslať jedným e-mailom; do predmetu napíšte (bez diakritiky) **STROM - vaše priezvisko**. Prílohy označte svojím priezviskom, sériou a číslom príkladu. Napríklad riešiteľ Jozko Mrkvicka pošle e-mail s predmetom **STROM - Mrkvicka** a jeho prílohy (riešenia úloh 2 a 5) budú označené **Mrkvicka_1seria_2uloha.pdf** a **Mrkvicka_1seria_5uloha.pdf**.

Vaše riešenia musia dôjsť do 22:00 v deň termínu série a len na uvedenú adresu. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne. Akceptujeme prvé riešenie danej úlohy, ktoré pošlete.

Riešitelia, ktorí svoje riešenia pošlú elektronicky, dostanú opravené riešenia e-mailom na adresu, z ktorej svoje riešenia poslali.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **príhlášku**. Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail strom@strom.sk, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva: všetky vyriešené úlohy

treťiaci, septima: všetky vyriešené úlohy

druháci, sexta: päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh

prváci, kvinta: päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro ($3 + \underline{2} + 4 + 5 + 4$) + 2 = 20 bodov a Marcel ($3 + 2 + 4 + \underline{5} + 4$) + 5 = 23 bodov. Jasné, nie?

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhľime nadol) a „takmer kópia“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak pošlete svoje riešenia do jedného dňa po termíne, dostanete dve tretiny svojich bodov (zaokrúhlené nahor), ak od jedného do troch dní po termíne, tak polovicu (zaokrúhlenú nahor) a ak neskôr, tak nulu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešenia zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrovaná.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie nebudú na základe poradia **STROMu** vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri menej ako 20 bodov.

Zadania úloh letného semestra 36. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **19. 3. 2012**

1. Nájdite všetky prirodzené čísla k , pre ktoré medzi desiatimi po sebe idúcimi číslami

$$k + 1, k + 2, \dots, k + 10$$

je najviac prvočísel ako môže byť.

2. Zostrojte bod M vnútri daného trojuholníka ABC tak, aby $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$.

3. V Kráľovstve leteckom je m miest, v každom jedno letisko. Medzi niektorými mestami existujú letecké linky, medzi niektorými nie. Inak ako lietadlami sa tu nedá prepravovať. Ďalej tu platia dve zvláštnosti. Ak by ste zrušili hociktorú linku, stále sa bude dať z každého mesta dostať do každého. Ak by ste však zrušili ľubovoľné dve linky, prestalo by to platiť. Koľko je v Kráľovstve leteckom leteckých liniek?

4. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo zapísané v desiatkovej sústave 3^n rovnakými číslicami deliteľné číslom 3^n .

5. Zistite, či existujú také reálne čísla b, c , že obidve kvadratické rovnice s neznámou x , resp. y

$$\begin{aligned}x^2 + bx + c &= 0, \\2y^2 + (b + 1)y + c + 1 &= 0\end{aligned}$$

majú dva celočíselné korene. Svoju odpoveď zdôvodnite.

6. Dané sú štyri navzájom rôznobežné priamky v rovine, z ktorých žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom. Tieto priamky určujú štyri trojuholníky.

- a) Dokážte, že kružnice opísané týmto štyrom trojuholníkmi prechádzajú spoločným bodom X .
b) Dokážte, že stredy kružníc opísaných týmto trojuholníkmi ležia na kružnici prechádzajúcej bodom X .

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **30. 4. 2012**

1. Daných je päť bodov P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 vo vnútri štvorca so stranou dĺžky 1. Dokážte, že aspoň jedna zo všetkých vzdialeností týchto bodov je menšia ako $\sqrt{2}/2$.

2. Pre ktoré $n \geq 3$ existuje n navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že sa dajú usporiadať do kruhu tak, aby podiel každých dvoch susedných čísel (väčšie delené menším) bol prvočíslom? Nájdite všetky takéto n a ukážte, prečo iné nevyhovujú.

3. Na tanečnom večierku boli chlapci a dievčatá. Každý chlapec tancoval s aspoň jedným dievčaťom, ale nie so všetkými. Každé dievča tancovalo s aspoň jedným chlapcom, ale nie so všetkými. Dokážte, že sa vždy dajú vybrať dvaja chlapci a dve dievčatá tak, že každý z vybratých chlapcov tancoval s práve jedným z vybratých dievčat a každé z vybratých dievčat tancovalo s práve jedným z vybratých chlapcov.
4. Daná je kružnica k a jej tetiva AB .
- Nájdite na kružnici bod C taký, že obsah trojuholníka ABC je maximálny.
 - Nájdite na kružnici bod D taký, že obvod trojuholníka ABD je maximálny.
 - Nájdite trojuholník XYZ , ktorý je vpísaný do kružnice k a má najväčší možný obvod.
5. Každá strana konvexného štvoruholníka je rozdelená na osem zhodných úsečiek. Spojíme príslušné body na protiľahlých stranách a vznikne šachovnica. Políčka vyfarbíme ako na skutočnej šachovnici. Dokážte, že čierna a biela plocha majú rovnaký obsah.
6. Nech pre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ platí $f(0) = 1/2$ a zároveň pre nejaké reálne číslo a platí

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(a - y) + f(y) \cdot f(a - x) \quad \text{pre všetky reálne } x, y.$$

Dokážte, že f je konštantná funkcia.

Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail strom@strom.sk.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2012 • Letný semester 36. ročníka (2011/2012)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	http://www.strom.sk
E-mail:	zdruzenie@strom.sk