



Vitajte!

Práve ste sa ocitli na prahu nového semestra STROMu. Za pootvorenými dverami už stoja zadania príkladov zimnej série a túžia po vašom čase a pozornosti. Hoci to zatiaľ vyzerá ako rande naslepo, čakajú vás nádherné mesiace, počas ktorých sa s nimi viete spoznať a zbližiť. Nezapudnite ich potešiť správnymi výsledkami a skvele spísanými riešeniami. Želáme vám, aby váš príbeh mal šťastný koniec.

S láskou **STROM**isti



Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (Súťaž Talentovaných Riešiteľov Oblubujúcich Matematiku), organizovaný Združením STROM, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre študentov stredných škôl, no do riešenia sa kludne môžu zapojiť aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestry, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.

Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka dopĺňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, často netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

Košický Matboj

Už 16. ročník tejto súťaže sa uskutoční 21. októbra 2016 v Košiciach. Inštrukcie k prihlasovaniu na túto súťaž budú rozposlané na školy v druhej polovici septembra. Ak ste o súťaži doposiaľ nepočuli a radi by ste sa dozvedeli viac, zavítajte na <https://seminar.strom.sk/sk/matboj/>, kde nájdete zadania a riešenia starších ročníkov, respektíve do galérie s fotografiami z minulých Matbojov.

Matematický krúžok

Aj v školskom roku 2016/2017 sa na **Prírodovedeckej fakulte UPJŠ** v Košiciach na Jesennej 5 bude konať v prípade dostatočného záujmu každý týždeň matematický krúžok, ktorý bude zameraný hlavne na prípravu na Matematickú olympiádu v kategóriách A, B a C.

Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškolač (ale samozrejme aj šikovný základnoškolač), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde. Viac o Matematickej olympiáde v Košickom kraji, ako aj o matematických krúžkoch, sa dozvieš na stránke <http://umv.science.upjs.sk/mo>.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke <http://seminar.strom.sk>. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile - odkaz **Aktualizovať profil** v sekcii **Správa účtu**. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Na tejto stránke nájdesh takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektno vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

Elektronické odovzdávanie je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke seminar.strom.sk. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo **Odovzdať** pri konkrétnom príklade v sekcii **Príklady**. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

V prípade technických problémov na našej strane posielajte na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk vo formáte PDF.

Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárov k úlohám na našej stránke, cez e-mail strom@strom.sk alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- tretiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
- prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 5 = 23$ bodov. Jasné, nie?

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od zverejnenia opravených riešení zaslať e-mailom (na strom@strom.sk) sťažnosť a tá bude prešetrená.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z Matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškôlkami) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a Matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

Zadania úloh zimného semestra 41. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na <https://seminar.strom.sk>.

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **10. 10. 2016**

1. Dokážte, že ak je číslo n druhou mocninou prirodzeného čísla, potom je súčin posledných dvoch cifier dekadického zápisu čísla n párne číslo.
2. Je daný štvorec a 9 priamok. Každá z týchto 9 priamok delí tento štvorec na štvoruholníky, ktorých pomer obsahov je $2 : 3$. Dokážte, že aspoň 3 z týchto priamok sa pretínajú v jednom bode.
3. Bod M leží na priemere AB kružnice k . Tetiva CD prechádza bodom M a pretína AB pod uhlom 45° . Dokážte, že súčet $|CM|^2 + |DM|^2$ nezávisí od výberu bodu M .
4. Pre ktoré reálne čísla c existujú práve dve rôzne reálne čísla, ktoré sú riešením rovnice $x^3 + (c - 1)x + c = 0$?
5. V pravidelnom n -uholníku je každá strana aj uhlopriečka zafarbená jednou z $n - 1$ farieb. Vrchol sa nazýva dúhový, ak všetky strany a uhlopriečky, ktoré z neho vychádzajú, majú navzájom rôzne farby. Koľko najviac vrcholov môže byť dúhových?
6. Do daného ostrouhlého trojuholníka ABC vpíšte trojuholník KLM tak, aby jeho obvod bol najmenší možný.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **21. 11. 2016**

1. Dokážte, že v každom konvexnom päťuholníku vieme vybrať 3 uhlopriečky tak, že ich poprekladaním je možné zostrojiť trojuholník.
2. Nech F_n je n -té Fibonacciho číslo. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (a, n) také, že $F_n + F_{2n} + F_{3n} = a! + 3$.
3. Do tabuľky 4×4 sú vpísané kladné reálne čísla tak, že súčin v každej päťici tvaru T je rovný 1. Zistite maximálny počet rôznych čísel zapísaných v tabuľke.
4. Je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB . Na jeho odvesnách BC a AC sú postupne zvolené také body K a L , že $|CK| = 2|BK|$ a $|AL| = 2|CL|$. Nech D je päta výšky z vrcholu C trojuholníka ABC . Dokážte, že body K, C, L a D ležia na jednej kružnici.
5. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla x a y platí nerovnosť

$$x + y \geq \sqrt{xy} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

6. Nech x_1, x_2, \dots, x_n sú nezáporné reálne čísla, ktorých súčet je 1. Dokážte, že existujú čísla a_1, a_2, \dots, a_n , z ktorých každé je rovné 0, 1, 2, 3, alebo 4 také, že

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (2, 2, \dots, 2) \quad \text{a} \quad 2 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq 2 + \frac{2}{3^n - 1}.$$

Mohlo by sa hodiť...

Fibonacciho postupnosť: Majme postupnosť členov $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, pričom: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pre $n \geq 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Táto postupnosť sa nazýva Fibonacciho a každý jej člen je Fibonacciho číslo.

Tálesova veta: Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C práve vtedy, keď AB je priemerom kružnice trojuholníku opísanej.

Tetivový štvoruholník: Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protilahlých vnútorných uhlov 180° .

Dirichletov princíp: Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkach a aspoň $kn + 1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k + 1$ predmetmi).

Táto formulácia môže znieť neprakticky, no v rôznych úlohách môže byť tento princíp užitočný. Predstavte si napríklad čísla ako predmety a zvyšky po delení m ako priehradky. Vyriešite tak úlohu: dokážte, že z ľubovoľných 11 prirodzených čísel viete vybrať dve, ktorých rozdiel končí nulou.

KA - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla x_1, x_2, \dots, x_n platí, že ich kvadratický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \dots = x_n$), ich aritmetickému priemeru, t.j.

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

AG - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla x_1, x_2, \dots, x_n platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \dots = x_n$), ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Matematická indukcia: Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n , potom platí aj pre číslo $n + 1$.“ Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine. Niekedy sa tieto kvádre stavajú do dlhého radu tak, aby každý pri svojom páde so sebou stiahol na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že n . kocka zapríčiniť pád $(n + 1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme



Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 1 • September 2016 • Zimný semester 41. ročníka (2016/2017)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	https://zdruzenie.strom.sk
E-mail:	info@strom.sk