Úvod

Funkcionálne rovnice sú na stredných školách málo známym pojmom. Dosť často sa však nejaká úloha z tejto oblasti ocitne v matematickej olympiáde v kategórii A. Študenti, ktorí podobné úlohy nikdy neriešili, s nimi majú zväčša problémy. Ide totiž o úlohy dosť zložité, a preto bez poriadneho vysvetlenia, čo vlastne funkcionálna rovnica je a ako sa rieši, majú len malú šancu s nimi niečo spraviť.

Čo je to funkcionálna rovnica?

Najlepšie bude vysvetliť si to na konkrétnom príklade.Vezmime si napríklad nasledovné zadanie: Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí $f(x+y) = x + f(y)$.
Už samo zadanie poukazuje na určitý rozdiel oproti „obyčajným“ rovniciam. Našou úlohou totiž nebude nájsť nejaké konkrétne číslo alebo viac čísel, či interval. Budeme hľadať funkcie, pričom riešením budú len tie, ktoré spĺňajú danú rovnicu pre všetky hodnoty kvantifikovaných premenných x a y. Práve s týmito kvantifikátormi majú študenti problémy. Sú zvyknutí na obyčajné rovnice a nevedia si predstaviť, čo znamená nájsť funkciu s takouto vlastnosťou. Namiesto toho skúšajú hľadať akési hodnoty x a y alebo nájdu funkciu, ktorá spĺňa dané podmienky len pre niekoľko konkrétnych hodnôt x, y.

Ako sa rieši funkcionálna rovnica?

Toto je ťažšia otázka. Univerzálny spôsob riešenia totiž neexistuje. Najsilnejšia zbraň, ktorú máme v rukách, je to, že hľadaná funkcia spĺňa danú rovnosť pre *všetky* hodnoty premenných z jej definičného oboru. Preto môžeme funkcionálnu rovnicu riešiť tak, že skúsime za x a y dosádzať konkrétne hodnoty alebo výrazy. Takto odvodíme nutné podmienky, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať. V prípade, že sme úspešní, to dostatočne zredukuje množinu funkcií, ktoré prichádzajú do úvahy ako riešenia. Tieto funkcie nakoniec vyskúšame, aby sme overili, či odvodené nutné podmienky sú aj postačujúce. (Napríklad keď vieme, že hľadaná funkcia f je lineárna, stačí dosadiť $f(x) = ax + b$ do skúmanej rovnice a zistiť, pre ktoré a, b je táto funkcia riešením.) Na to, aby sme vopred vedeli určiť, čo nám pomôže a čo nie, potrebujeme značnú prax, preto sa na začiatku netreba báť skúšať. V riešených príkladoch sú uvedené niektoré časté dosadenia. Po ich osvojení budeme schopní vyriešiť mnohé úlohy a získame určitý „cit“ pre to, čo sa nám kedy môže hodiť.

Ako vyriešime rovnicu $f(x+y) = x + f(y)$?

Na začiatok sa oplatí dosadiť za jednu alebo obe premenné nulu. Pri tých jednoduchších príkladoch tým môžeme získať rovno riešenie, pri tých zložitejších aspoň nejaké čiastočné informácie, ktoré nám neskôr môžu pomôcť. Dosadením $x = y = 0$ dostaneme $f(0) = f(0)$. Z toho veľmi múdrejší nie sme, tak skúšajme ďalej. Môžeme si všimnúť, že dosadením $x = 0$ sa tiež nič nové nedozvieme, tak teda nech $y = 0$ a dostaneme $f(x+0) = x + f(0)$, teda $f(x) = x + f(0)$. Teraz si treba už len uvedomiť, čo sme dostali. Čo je to vlastne $f(0)$? Je to funkčná hodnota nejakej konkrétnej funkcie f v bode 0, takže to bude pre danú funkciu konštanta. Označme ju c. A dostali sme sa do finálnej fázy riešenia našej rovnice. Vieme totiž, že hľadaná funkcia bude lineárna v tvare $f(x) = x + c$. Už len zistiť, akú hodnotu môže nadobúdať naše c. Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme

$$f(x+y) = (x+y) + c = x + (y+c) = x + f(y).$$

Ako vidíme, funkcia $f(x) = x + c$ je riešením našej funkcionálnej rovnice pre akúkoľvek hodnotu c.

Čo robí študentom najväčšie problémy?

Aj po pochopení toho, čo si vlastne treba predstaviť pod pojmom funkcionálna rovnica a riešenie funkcionálnej rovnice, zvykne samostatné riešenie príkladov robiť študentom problémy. Určite im treba pripomenúť, že väčšina úprav, ktoré pri riešení funkcionálnych rovníc urobíme, sú dôsledkové a nie ekvivalentné úpravy. Naozaj: ak nejaká funkcia spĺňa danú rovnicu pre všetky hodnoty premenných, tak ju spĺňa, aj keď tam za niektoré premenné dosadíme nejaké konkrétne hodnoty. Naopak to však už platiť nemusí, a teda nesmieme zabudnúť urobiť skúšku správnosti. Ďalej si treba dávať pozor na to, ako sme si označili konštantu a ako premennú. Pri ťažších úlohách sa totiž môže stať, že dospejeme k poznatku, že $\exists k \in \mathbb{R}$ také, že napr. $f(k) = k^2$. To však ešte neznamená, že $f(x) = x^2$ je riešením danej rovnice. Toto je len jedna zo záludností, s ktorými sa môžeme pri funkcionálnych rovniciach stretnúť; niekoľko ďalších uvidíme pri úlohách uvedených v tomto texte.

Rady na záver

Príklady sú zoradené podľa odhadovanej obtiažnosti. V riešeniach sa často odvolávame na metódu použitú v niektorej z predošlých úloh, preto odporúčame pri riešení dodržať toto poradie. V niektorých z nich sú zo štyroch vyriešené povedzme len dva. Je to preto, že postup pri ostatných je analogický a podľa uvedených riešení predošlých úloh ich čitateľ ľahko vyrieši sám. Prednáška je pre študentov, ktorí sa s funkcionálnymi rovnicami ešte nestretli, preto prvé príklady sú nie sú zložité a slúžia na precvičenie jednoduchých dosadení. Príklady 5., 6. a 7. vyžadujú zložitejšie dosadenia a príklad 8. ešte aj trochu ťažšie úvahy.

Príklady

1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

   a) $f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2$.

   b) $f(x+y) + f(x-y) = 2x + 2$.

   c) $f(x+y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2-1)f(y) = 2x(xy-1) - 5$.

   d) $f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy\sqrt[3]{f(y)} + x^3$.

   e) $f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$.

2. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí $f(x+y) = f(y) \cdot a^x$, kde a je kladné reálne číslo a navyše platí $a \neq 1$.

3. Ukážte, že nasledujúce funkcionálne rovnice nebudú platiť pre žiadne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   a) $f(x+y) + f(x-y) - f(x) = f(y) + x - y^2$

   b) $f(x) + f(-y) = x^2 - y^2$

4. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

   a) $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$.

   b) $f(x+y) - 3f(x-y) = x^2(f(y) + 1 - \frac{y^2}{2}) - 2f(x) + y(4x-y)$.

   c) $f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$.

5. Nájdite všetky *prosté* funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(xf(y) + y^2) + f(x+y) = f(x-y) + f(y^2 + (f(y))^2).$$

6. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x^3 - y^3) + f(x+2y) = f(x^2 + xy + y^2) + 3x.$$

7. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x^2 + 3y + xy) = f(xy) + 3f(y) + x^2.$$

8. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y, z platí

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z).$$

Riešenia

1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

a) $f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2$
Riešenie: Začneme tak, ako sme povedali v úvode, dosadením nejakých konkrétnych hodnôt za x a y. Nech $x = 0$ aj $y = 0$, potom dostaneme $f(0) + 2f(0) - 4f(0) = 0$, teda po úprave $f(0) = 0$. Dosaďme teraz $y = 0$. Rovnica bude mať tvar $f(x) + 2f(x) - 4f(x) + xf(0) = -x^2$. Keďže $f(0) = 0$ dostaneme $f(x) = x^2$. Zistili sme, že jediným možným kandidátom na riešenie je $f(x) = x^2$. Nemôžeme to však hneď prehlásiť za riešenie, lebo úpravy, ktoré sme robili, boli len dôsledkové. Po skúške dostaneme, že $f(x) = x^2$ naozaj vyhovuje zadaniu.

b) $f(x+y) + f(x-y) = 2x + 2$
Riešenie: Ako v predošlom prípade začnime dosadením $x = 0$ a $y = 0$. Rovnica sa zmení na $f(0) + f(0) = 2$, teda $f(0) = 1$. Teraz nech $x = 0$ a máme rovnicu

$$f(y) + f(-y) = 2.$$

Z toho oveľa múdrejší nie sme, preto skúsme dosadiť $y = 0$ a dostaneme

$$f(x) + f(x) = 2x + 2.$$

Po predelení dvomi dostaneme funkciu $f(x) = x + 1$. Opäť ju nemôžeme hneď prehlásiť za riešenie, ale treba urobiť skúšku. V našom prípade dostaneme

$$f(x+y) + f(x-y) = (x + y + 1) + (x - y + 1) = 2x + 2.$$

Funkcia $f(x) = x + 1$ je teda naozaj jediným riešením danej funkcionálnej rovnice.

c) $f(x+y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2 - 1)f(y) = 2x(xy - 1) - 5$
Riešenie: Opäť nech $x = y = 0$, čím dostaneme $-5f(0) = -5$, teda $f(0) = 1$. Skúsme ďalej dosadiť $x = 0$. Naša rovnosť sa zmení na

$$f(y) - 2f(0) - 3f(0) + (-1)f(y) = -5.$$

Po úprave to bude $-5f(0) = -5$, teda $f(0) = 1$. To sme už vedeli, tak vyskúšajme $y = 0$. Dostaneme

$$f(x) - 2f(0) - 3f(x) + (2x^2 - 1)f(0) = -2x - 5.$$

Po úpravách $-2f(x) - 2 + 2x^2 - 1 = -2x - 5$, teda $f(x) = x^2 + x + 1$. Daná funkcia je naozaj riešením. Skúšku ponechávame na čitateľa.

2. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré platí $f(x+y) = f(y) \cdot a^x$, kde a je kladné reálne číslo a navyše platí $a \neq 1$.

Riešenie: Táto rovnica vyzerá na prvý pohľad inak ako tie predošlé, ale preto sa jej ešte netreba zľaknúť. Skúsme podobne ako doteraz dosadiť nejaké vhodné hodnoty za x a y. Nech teda pre začiatok $x = y = 0$. Dostaneme $f(0) = f(0)$. Nič nám to nedalo, tak skúsime niečo ďalšie. Dosadiť $x = 0$ by už na prvý pohľad k ničomu neviedlo, tak dosaďme radšej $y = 0$. Dostaneme $f(x) = f(0) \cdot a^x$. Hodnota $f(0)$ je nejaká konkrétna konštanta, preto ju označme $f(0) = c$. Máme teda rovnosť $f(x) = c \cdot a^x$.

Pre ktoré c je daná funkcia riešením? Stačí dosadiť $f(x) = c \cdot a^x$ do pôvodnej rovnosti a dostaneme $f(x+y) = c \cdot a^{x+y} = c \cdot a^y \cdot a^x = f(y) \cdot a^x$. Ako vidíme, funkcia $f(x) = c \cdot a^x$ je riešením pre akékoľvek c, čiže pre akúkoľvek hodnotu $f(0)$.

3. Ukážte, že nasledujúce funkcionálne rovnice nebudú platiť pre žiadne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x+y) + f(x-y) - f(x) = f(y) + x - y^2$

Riešenie: Uvedieme tu len stručný návod. Podobným dosadením ako v predošlých príkladoch dostaneme, že riešením môžu byť len lineárne funkcie $f(x) = x + f(0)$. Ako to bude so skúškou správnosti?

b)$f(x) + f(-y) = x^2 - y^2$

Riešenie: Skúsme ako v predošlých príkladoch dosadiť $x = y = 0$. Po úprave dostaneme $f(0) = 0$. Dosadením $y = 0$ dostaneme $f(x) = x^2$. Je táto funkcia naozaj riešením danej funkcionálnej rovnice? Zaujímavé na tomto príklade je všimnúť si, čo by sa stalo, keby sme potom dosadili $x = 0$. Dostali by sme rovnicu $f(-y) = -y^2$. Nech $-y = t$ (t bude voľná premenná podobne ako y), potom dostaneme $f(t) = -t^2$. Dostali sme teda, že pre hľadanú funkciu f musí platiť $x^2 = f(x) = -x^2$. Toto však nastane len pre $x = 0$, ale má to platiť pre všetky reálne čísla, teda daná funkcionálna rovnica nemá riešenie.

4. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré platí:

a)$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$

Riešenie: Nech $x = y = 0$, čím dostaneme $-2f(0) = -2$, teda $f(0) = 1$. Dosadením $y = 0$ nedostaneme nič nové (vyskúšajte si). Preto skúsme dosadiť $x = 0$. Dostaneme rovnicu

$$f(y) - 2f(-y) + 1 - 2f(y) = y - 2.$$

Vidíme, že v argumentoch funkcie sa nám vyskytuje y a $-y$. Potrebujeme s nimi niečo spraviť tak, aby sa tam nevyskytovali oba súčasne, ale len jeden. Tu sa nám ponúkajú substitúcie $y = t$ a $y = -t$. Po úprave dostaneme nasledovné rovnice.

$$\begin{aligned} -f(t) - 2f(-t) &= t - 3 \\ -f(-t) - 2f(t) &= -t - 3 \end{aligned}$$

Dostali sme dve rovnice s funkciami s tými istými argumentmi, teda ich stačí vhodne od seba odčítať. Vynásobením druhej rovnice číslom -2 dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} -f(t) - 2f(-t) &= t - 3 \\ 2f(-t) + 4f(t) &= 2t + 6 \end{aligned}$$

Ich sčítaním dostaneme $3f(t) = 3t + 3$, čo po predelení rovnice číslom 3 dáva funkciu $f(t) = t + 1$. Po dosadení do pôvodnej rovnice dostávame

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = x + y + 1 - 2(x - y + 1) + x + 1 - 2(y + 1) = y - 2.$$

Funkcia $f(t) = t + 1$ je teda naozaj riešením pôvodnej funkcionálnej rovnice.

b)$f(x+y) - 3f(x-y) = x^2(f(y) + 1 - \frac{y^2}{2}) - 2f(x) + y(4x - y)$

c)$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$

Riešenie: Riešenie príkladov b) a c) je analogické s riešením príkladu a), preto ho ponechávame na čitateľa.

5. Nájdite všetky *prosté* funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(xf(y)+y^2)+f(x+y)=f(x-y)+f(y^2+(f(y))^2).$$

Riešenie: Skúsime dosadiť také x, y, aby vznikli jednoduchšie výrazy. Ľahšie sa nám potom s nimi bude pracovať a skôr si všimneme vlastnosti funkcie f.
Napríklad po dosadení $y=0$ bude pre všetky x platiť $f(x-y)=f(x+y)=f(x)$ a tento výraz môžeme odčítať od oboch strán rovnice; dostaneme $f(xf(0))=f(f(0)^2)$. Skúmaná funkcia je prostá, teda z rovnosti funkčných hodnôt $f(a)=f(b)$ vyplýva rovnosť argumentov $a=b$. Preto v našom prípade pre všetky reálne x musí platiť $xf(0)=f(0)^2$, z čoho $f(0)(x-f(0))=0$, takže $f(0)=0$ (druhý činiteľ $x-f(0)$ je rovný 0 pre nanajvýš jedno x). Nič viac takto nedostaneme, treba skúšať ďalej.
Iná možnosť je skúsiť dosadiť x, y tak, aby vypadli výrazy $f(xf(y)+y^2)$ a $f(y^2+(f(y))^2)$. Z porovnania argumentov je na prvý pohľad jasné, že musíme zvoliť $x=f(y)$ (zjavne pre ľubovoľné y je hodnota $f(y)$ definovaná, nič nám preto nebráni dosadiť ju za x). Naša rovnica sa potom zredukuje na $f(f(y)+y)=f(f(y)-y)$, opäť využijeme, že f je prostá; z rovnosti argumentov dostávame $y=-y$. Toto však zrejme nie je pravda pre všetky reálne čísla y, takže sme skončili: neexistuje žiadna funkcia, ktorá by spĺňala všetky podmienky zadania.

6. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x^3-y^3)+f(x+2y)=f(x^2+xy+y^2)+3x.$$

Riešenie: Tak čo s tým? Dosaďme $x=0$, dostaneme $f(-y^3)+f(2y)=f(y^2)$.Z tohto dostaneme, že $f(0)=0$, ale nič viac, keďže argumentami f sú v získanom výraze nepríjemné polynómy, každý iného stupňa.
Nech $y=0$, dostaneme $f(x^3)+f(x)=f(x^2)+3x$. O nič lepšie ako naposledy, člen $3x$ na pravej strane nemôžeme nijako využiť, keďže nevieme nič o vzťahu medzi ostatnými členmi. Ani porovnanie s predošlým tvarom (ktorý má v argumentoch polynómy rovnakých stupňov) nevedie nikam: keby sme teraz za x dosadili y či $2y$ a porovnali to s výsledkom z predošlého odstavca, zase dostaneme len nič nehovoriaci výraz s rôznymi polynómami premennej y v argumentoch funkcie f.
Skúsme niečo dosadiť tak, aby nejaký výraz na ľavej strane bol rovnaký ako výraz na pravej strane (potom oba vypadnú). Na prvý pohľad nevidíme veľkú príbuznosť medzi argumentmi f na ľavej a na pravej strane, nič sa neponúka samo od seba. Skúsme sa najprv zbaviť najzložitejších výrazov. Nemusí to nikam viesť, ale za pokus to stojí. Vieme nájsť také x, y, aby $x^3-y^3=x^2+xy+y^2$? Výraz na ľavej strane tejto rovnosti vieme rozložiť na súčin; po ekvivalentnej úprave dostaneme

$$(x^2+xy+y^2)(x-y-1)=0.$$

Ľahko sa úpravou na štvorec presvedčíme, že

$$x^2+xy+y^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{y}{2}+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0,$$

rovnosť nastáva iba pre $x=y=0$ a tento prípad nás z pohľadu funkcionálnej rovnice už nezaujíma. Preto budeme dosádzať tak, aby bol rovný 0 druhý výraz $x-y-1$. To sa dá dosiahnuť ľahko, stačí, aby $x=y+1$. Po dosadení $x=y+1$ do našej rovnice dostávame

$$f(3y+1)=3(y+1), \tag{1}$$

ostatné členy vypadli. Uvedomme si silu nášho dosadenia. Spočíva v tom, že máme aspoň jeden *voľný paramater* – premennú v našom výraze (1), za ktorú môžeme ďalej dosadzovať. Keby to tak nebolo, nehovorí získaný vzťah o f takmer nič, nanajvýš o niekoľkých konkrétnych hodnotách (napríklad keby sme vynulovali prvú zátvorku voľbou $x = y = 0$, dostaneme $f(0) = 0$, ale nič viac).
Pozrime sa na vzťah (1), ktorý platí pre všetky reálne y. Ponúka sa nám substitúcia $3y + 1 = z$, aby sme na ľavej strane mali jednoduchší výraz v argumente. Táto substitúcia je lineárna, teda vieme spätne ľahko a jednoznačme vyjadriť $y = (z - 1)/3$. Inak povedané, funkcia $y \to 3y + 1$ je bijektívna na množine reálnych čísel – ku každému y vieme nájsť z a naopak, preto touto substitúciou nič nestrácame, vzťah, ktorý dostaneme, bude ekvivalentný so vzťahom (1). (Pre porovnanie si to porovnajte so substitúciou $z = x^2$ v nasledujúcom príklade.)
Po substitúcii popísanej v predošlom odstavci dostaneme vzťah

$$f(z) = 3 \cdot \left(\frac{z-1}{3} + 1\right) = z + 2,$$

ktorý musí funkcia f spĺňať pre všetky reálne čísla z. Ostáva nám len overiť, či funkcia $f(z) = z + 2$ je riešením pôvodnej rovnice. Riešením nie je, pretože po dosadení $y = 0$ dostaneme polynomickú rovnicu pre x, ktorej riešením môže byť len konečne veľa čísel x (nanajvýš tri, keďže je to rovnica tretieho stupňa) a teda rovnosť zo zadania nemôže byť splnená pre všetky x, y.

7. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x^2 + 3y + xy) = f(xy) + 3f(y) + x^2.$$

Riešenie: Po dosadení $y = 0$ dostaneme

$$f(x^2) = 4f(0) + x^2. \tag{2}$$

Keď do tohto dosadíme $x = 0$, dostaneme $f(0) = 0$, teda zo vzťahu (2) máme

$$f(x^2) = x^2. \tag{3}$$

Hneď sa ponúka substitúcia $z = x^2$, po jej zavedení dostaneme $f(z) = z$ a boli by sme raz-dva hotoví, keby naša substitúcia nemala jeden háčik. Číslo x^2 je vždy nezáporné, preto vzťah (3) nehovorí nič o hodnotách funkcie f pre záporné čísla. Preto po zavedení substitúcie treba dodať podmienku $z \geq 0$, bez ktorej by sme mohli stratiť niektoré riešenia. Porovnajte túto substitúciu so substitúciou použitou v prechádzajúcom príklade.
Zostáva nám preskúmať hodnoty funkcie f na množine záporných čísel. Dosadenie $x = 0$ nedá veľa užitočného, preto skúsime dosadiť niečo tak, aby nejaké výrazy na ľavej a pravej strane boli rovnaké a vypadli. Možností je niekoľko, ich preskúmanie čitateľovi vrelo doporučujeme. My sa pozrieme na prvú, čo padne do oka: vľavo aj vpravo je v jednom výraze argumentom funkcie xy, tak skúsime dosiahnuť, aby $x^2 + 3y + xy = xy$ pre čo najviac dvojíc čísel x, y. Nech teda $y = -x^2/3$. Toto dosadíme do skúmanej rovnice a po úprave dostaneme

$$0 = 3f(-\frac{x^2}{3}) + x^2.$$

Výborne, zjavne má f záporný argument. Nech $z = -x^2/3$, nezabudneme, že z je nekladné číslo. Po dosadení a úprave dostaneme $f(z) = z$ pre nekladné z. Rovnaký predpis musí mať f aj na kladných číslach, ako sme už dokázali. Ľahko si overíme, že táto funkcia je riešením pôvodnej rovnice.

8.Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y, z platí

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z).$$

Riešenie: Dosaďme za (x, y, z) hodnoty $(1, 0, 0)$:

$$f(0) = f(0) + f(0) \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = 0.$$

Funkcia $f(x) = 0$ je riešením našej funkcionálnej rovnice.
Nech ďalej existuje také k, že $f(k) \neq 0$. Dosaďme $(x, 0, k)$:

$$f(kf(x)) = xf(k). \tag{4}$$

Môžeme si všimnúť, že ak pre nejaké a, b platí $f(a) = f(b)$, potom $f(kf(a)) = f(kf(b))$, a teda podľa rovnosti (4) $af(k) = bf(k)$. To je ekvivalentné s rovnosťou $a = b$, teda hľadaná funkcia je prostá.
Do (4) dosaďme $x = 1$ a dostávame $f(kf(1)) = 1f(k)$. Odtiaľ $kf(1) = k$, čo platí len vtedy, keď $f(1) = 1$.
Do rovnice zo zadania dosaďme $(x, 0, 1)$:

$$f(f(x)) = f(0) + xf(1) = x. \tag{5}$$

Nech $y = 0$, $x = f(z)$, potom $f(zf(f(z))) = f(z^2) = f(z)^2$, čiže $f(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. Dosadením $x = 1$ do rovnice zo zadania získame

$$f(y + z) = f(y) + f(z). \tag{6}$$

Nech teraz $z = -y$.

$$\begin{aligned} f(y - y) &= f(y) + f(-y) \\ -f(y) &= f(-y) \end{aligned}$$

Vidíme, že naša funkcia je nepárna. Už vieme, že $f(x) > 0$ pre $x > 0$, teda bude platiť, že $f(x) < 0$ pre $x < 0$. Tak a už sa blížime k záveru. Čím ďalej tým viac sa nám naša funkcia začína podobať na funkciu $f(x) = x$. Už to len trochu celé dotiahnuť.
Predpokladajme, že existuje také k, že

$$f(k) = k + l, \tag{7}$$

$l \neq 0$. Potom

$$k \overset{(5)}{=} f(f(k)) \overset{(7)}{=} f(k + l) \overset{(6)}{=} f(k) + f(l) \overset{(7)}{=} k + l + f(l).$$

Teda existuje l také, že $f(l)$ má opačné znamienko ako l a to je v spore s tým, čo vieme o funkcii f. Tým sme ukázali, že $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Táto funkcia je naozaj riešením našej funkcionálnej rovnice a spolu s $f(x) = 0$ sú to jediné riešenia.