Mohlo by sa hodiť

Geometria

Tálesova veta

Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C práve vtedy, keď AB je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Veta o obvodovom a stredovom uhle

Majme oblúk AB na kružnici so stredom S. Uhol ASB sa nazýva stredový uhol k oblúku (nad tetivou) AB. Nech X je ľubovoľný bod na dlhšom oblúku AB, potom uhol AXB sa nazýva obvodový k oblúku (nad tetivou) AB a jeho veľkosť je rovnaká pre každú polohu bodu X, a to polovica veľkosti príslušného stredového uhla.

Tetivový štvoruholník

Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých vnútorných uhlov 180°.

Mocnosť bodu ku kružnici a chordála

Majme v rovine bod M a danú kružnicu k so stredom S a polomerom r. Mocnosť bodu M ku kružnici k nazývame reálne číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v = |MS|$. Dá sa ukázať, že ak je bod M vo vonkajšej (resp. vnútornej) oblasti kružnice a p je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom M, ktorá pretína kružnicu k v bodoch P, Q, platí $m = |MP||MQ|$ (resp. $m = -|MP||MQ|$). Je zaujímavé, že tento súčin je rovnaký bez ohľadu na priamku p a je určený len bodom M a kružnicou k.
Majme teraz v rovine 2 kružnice k, l. Chordálou dvoch kružníc nazývame množinu všetkých bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Dá sa ukázať, že chordálou dvoch nesústredných kružníc je vždy priamka kolmá na spojnicu ich stredov. Odtiaľ ľahko vyplýva, že chordálou dvoch pretínajúcich sa kružníc bude priamka určená ich priesečníkmi.
Viac o tejto téme sa môžete dozvedieť z tohto materiálu: `seminar.strom.sk/media/uploads/mocnost.pdf`

Matematická indukcia

Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „Ak naše tvrdenie platí pre číslo n, potom platí aj pre číslo $n + 1$.“ Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine. Niekedy sa tieto kvádre stavajú do dlhého radu tak, aby každý pri svojom páde so sebou stiahol na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že n. kocka zapríčiní pád $(n + 1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu.

Dirichletov princíp

Majme n predmetov a m priehradiek. Chceme poukladať predmety do priehradiek tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradiek), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkách a aspoň $kn + 1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k + 1$ predmetmi).

Extremálny princíp

Táto technika sa používa najmä ako špeciálny prípad dôkazu sporom. Ak chceme dokázať, že neexistuje objekt spĺňajúci dané vlastnosti, môžeme napríklad predpokladať, že ak by taký objekt existoval, musel by existovať aj najmenší taký objekt. Ak však následne ukážeme, že vieme nájsť aj menší, dostaneme spor. Pozor však na nekonečné prípady. Viac sa môžete dočítať na `seminar.strom.sk/media/uploads/extremalny_princip.pdf`.

Kongruencie

V úlohách o celých číslach sa často pri riešení používajú zvyšky po delení nejakým číslom. Obzvlášť užitočné zvykne byť, keď dve čísla (dva výrazy) dávajú rovnaký zvyšok po delení tretím číslom. Preto na to máme špeciálny zápis, píšeme, že $a \equiv b \pmod{n}$, a hovoríme, že *a je kongruentné s b modulo n*. Tento zápis znamená, že a a b dávajú rovnaký zvyšok po delení n alebo ekvivalentne $n \mid a - b$ (rozdiel strán kongruencie je deliteľný jej modulom).

S kongruenciami možno pracovať podobne ako s rovnosťami – môžeme k obom stranám kongruencie pričítať nejaké číslo alebo ho od nich odčítať (tieto úpravy sú ekvivalentné), môžeme obe strany kongruencie vynásobiť nejakým číslom alebo obe strany vydeliť číslom nesúdeliteľným s modulom (vydelenie súdeliteľným číslom kongruenciu nezachováva, a teda vynásobenie strán kongruencie ľubovoľným číslom nie je ekvivalentná úprava) a môžeme tiež sčítať, odčítať alebo vynásobiť dve kongruencie so spoločným modulom.

Polynómy

Polynóm alebo aj mnohočlen stupňa n je výraz v tvare $P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, kde a_i sú dané konštanty, $a_n \neq 0$ a x je premenná. Číslo t sa nazýva koreň polynómu P, ak platí, že $P(t) = 0$, teda polynóm má v tomto bode hodnotu nula. V takom prípade výraz $(x - t)$ delí celý polynóm P, čiže platí $P(x) = (x - t) \cdot Q(x)$, kde Q je polynóm stupňa $n - 1$.

Nerovnosti

KA nerovnosť

Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že ich kvadratický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$) ich aritmetickému priemeru, t.j.

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

AG nerovnosť

Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$) ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

GH nerovnosť

Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že ich geometrický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$), ich harmonickému priemeru, t.j.

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Všeobecná priemerová nerovnosť

Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definujeme ich priemer p-tého rádu (kde p je kladné celé číslo) ako

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}}.$$

Priemer p-tého rádu čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je väčší, nanajvýš rovný pre všetky hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$) ich priemeru q-tého rádu práve vtedy, keď $p \geq q$, t. j.

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + \ldots + x_n^q}{n}}.$$

Permutačná nerovnosť

Nech $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ a $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ sú postupnosti reálnych čísel. Potom ak vynásobíme najväčšie číslo s najväčším, druhé s druhým atď., tak súčet takýchto súčinov je väčší alebo rovný ako keby sme ich násobili v inom poradí. Zároveň, ak vynásobíme najväčšie s najmenším, druhé s druhým najmenším atď., tak dostaneme najmenší súčet. Presnejšie, ak $z_1, z_2, \ldots, z_n$ je permutácia čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tak platí

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \geq x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1.$$

Funkcionálne rovnice

Táto tematika sa na stredných školách veľmi nevyučuje, ale nie je to nič komplikované. Úlohou je len nájsť všetky funkcie, ktoré budú spĺňať zadanie. Najsilnejšia zbraň, ktorú máme v rukách, je to, že hľadaná funkcia spĺňa danú rovnosť pre všetky hodnoty premenných z jej definičného oboru. Preto môžeme funkcionálnu rovnicu riešiť tak, že skúsime za x a y dosádzať konkrétne hodnoty alebo výrazy. Takto odvodíme nutné podmienky, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať. Nejde však o podmienky postačujúce, a preto je potrebné výslednú funkciu do rovnice dosadiť a urobiť skúšku. Viac o tom, ako riešiť takéto úlohy nájdete napríklad tu: `seminar.strom.sk/media/uploads/funkcionalne_rovnice.pdf`.